Terminale spé math : TRAVAIL À FAIRE POUR LE JOUR DE LA PRERENTRÉE, en expliquant votre démarche et/ou calculs intermédiaires

---

EXERCICE 1

Un hôtel propose deux formules pour une nuit : avec ou sans petit déjeuner. De plus ils peuvent choisir l'option « vue mer ».
Une étude a établi que :

- 30% des clients choisissent d'inclure le petit déjeuner
- 34% des clients optent pour la vue mer
- Parmi les clients qui ne prennent pas le petit déjeuner 40% choisissent la vue mer.

On note D l'évènement « le client choisit d'inclure le petit déjeuner » et V : « le client opte pour la vue mer » et on interroge au hasard un client de cet hôtel.

1) Calculer $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{D}} \cap \mathrm{V})$
2) En déduire $\mathrm{P}(\mathrm{D} \cap \mathrm{V})$
3) Calculer $\mathrm{P}_{\mathrm{D}}(\mathrm{V})$ et $\mathrm{P}_{\mathrm{V}}(\mathrm{D})$
4) On interroge au hasard deux clients de manière aléatoire et indépendante. Quelle est la probabilité qu'au moins un des deux choisisse l'option vue mer ? Détailler votre raisonnement.

EXERCICE 2 : les questions sont indépendantes

1) Simplifier les expressions suivantes :

   A = $\frac{(e^{-3})^2}{e^4 \times e^{-7}}$ B = $(e^{3x+1})^3 \times e^{-2x+1}$

2) Développer l'expression suivante :

   C = $(e^x - 1)(e^{-x} + 3) - (e^x + 1)^2$

3) Montrer que pour tout réel x on a : $\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

4) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2T^2 + T - 3 = 0$
   b) En déduire les solutions réelles de l'équation d'inconnue x : $2e^{2x} + e^x - 3 = 0$

5) Soit f la fonction définie pour tous réels x par $f(x) = -e^{2x} + e^x + x + 1$
   a) Calculer la dérivée $f'(x)$
   b) Montrer que $f'(x) = (2e^x + 1)(1 - e^x)$
   c) Étudier le signe de ce produit en détaillant (on pensera donc à résoudre $1 - e^x \geq 0$)
   d) En déduire les variations de f

6) Soit g la fonction définie pour tous réels x par $g(x) = (3x - 1)e^{-x}$
   a) Calculer la dérivée $g'(x)$
   b) En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.
   c) Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0.

EXERCICE 3

On se place dans un repère orthonormé du plan.
On placera les points A(1 ;2) , B(5 ;1) et C(- 1 ; - 2).

1) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
2) En déduire une valeur approchée en degrés de l'angle géométrique $\widehat{CAB}$
3) Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC)
4) Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.
5) À l'aide des deux équations précédentes déterminer les coordonnées du pied de la hauteur issue de A (il s'agit donc de l'intersection de la hauteur avec la droite (BC))
6) En déduire la valeur exacte de l'aire du triangle ABC.

EXERCICE 4

Un terrain de foot de 5000 m^2 est planté avec du gazon mais celui-ci est envahi par du trèfle.
Chaque année le trèfle détruit 10% de la surface et le jardinier arrache 300 m^2 de trèfle pour semer du gazon.

1) Justifier en détaillant les calculs qu'au bout de 2 ans le gazon représente 4620 m^2.
2) On pose u_n la surface occupée par du gazon au bout de n années.
   Ainsi $u_0 = 5000$ et $u_2 = 4620$.
   Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
3) On pose $v_n = u_n - 3000$
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (on cherchera à exprimer v_{n+1} en fonction de v_n)
   b) En déduire la forme explicite de v_n (c'est-à-dire exprimer v_n en fonction de n)
   c) En déduire la forme explicite de u_n
4) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n)
5) On souhaite savoir au bout de combien d'années la surface occupée par la pelouse est inférieure strictement à 3500 m^2 ; pour répondre à cette question écrire et faire fonctionner un algorithme (langage Python ou bien le langage de votre calculatrice).
6) Cette surface peut-elle devenir inférieure à 3000 m^2 ?