DEVOIR DE VACANCES DE MATHEMATIQUES À RENDRE LE JOUR DE LA PRÉRENTRÉE

EXERCICE 1

Le 1er janvier 2023 la somme de 1820€ est placée à intérêts composés sur un livret A, rémunéré au taux annuel de 3% : chaque année les intérêts génèrent des intérêts à leur tour. De plus on décide de placer tous les ans au premier janvier une partie des étrennes reçues à Noël à savoir 300€.

On note U_n le montant sur le livret A le 1er janvier de l'année 2023+n pour tout entier naturel n. On a donc $U_0 = 1820$

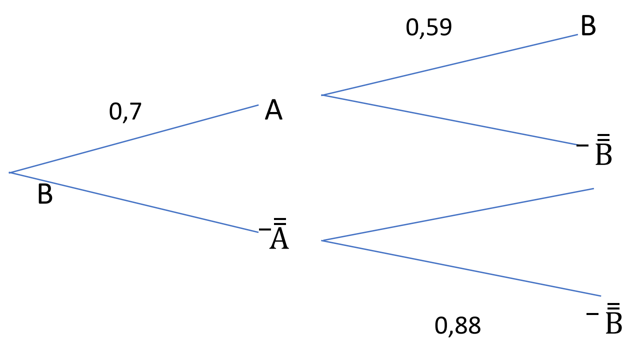
1) Déterminer les valeurs de U_1 et U_2 en détaillant vos calculs.
2) Démontrer (en détaillant à nouveau) que $U_{n+1} = 1{,}03U_n + 300$ pour tout entier naturel n
3) On pose maintenant $V_n = U_n + 10000$
   a) Montrer que $V_{n+1} = 1{,}03\ V_n$
   b) En déduire la nature de la suite (V_n) puis donner la forme explicite de V_n
   c) En déduire la forme explicite de U_n
   d) Calculer alors à l'euro près la somme obtenue le 1er janvier 2050.
4) Recopier et compléter les lignes 4 ;5 et 7 de l'algorithme suivant en python disant à partir de quelle année la somme obtenue dépasse le plafond du livret A fixé à 22950€.

```
def seuil():
    u=1820
    n=0
    while  ..................... :
        u=................
        n=n+1
    return ...
```

5) Le faire fonctionner et donner la réponse obtenue.

EXERCICE 2

Voici un arbre de probabilité, vous donnerez dans un premier temps les valeurs exactes et dans un second temps les valeurs approchées au millième.



1) Définir les trois valeurs présentes dans l'arbre par leur probabilité (0,7 = P(?) ...)
2) Recopier et compléter l'arbre.

3) Calculer en détaillant votre démarche la probabilité de B
4) Calculer alors la probabilité conditionnelle $P_B(A)$

EXERCICE 3 A et B sont deux évènements de probabilité non nulle.

On sait que $P_A(B) = 0,3$;$P(A \cap B) = 0,06$ et $P(B) = 0,78$
Déterminer alors en justifiant $P(A)$ et $P_{\bar{A}}(B)$

EXERCICE 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x + e^x$

1) Calculer $f'(x)$
2) Résoudre $f'(x) \geq 0$
3) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$
4) En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$

EXERCICE 5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x + 2$

1) Calculer $f'(x)$
2) Étudier le signe de cette dérivée et faire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
3) Écrire l'équation réduite de la tangente T au point d'abscisse 0.
4) On souhaite étudier la position relative de la courbe représentative de f par rapport à la tangente T (pour cela on étudie le signe de la différence $d(x)$ entre l'expression de f et l'expression de sa tangente)
   a) Montrer que cela revient à étudier le signe de $d(x) = x^2(12 - x)$
   b) Faire alors cette étude de signe et conclure.

EXERCICE 6 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{-2x+2}{x^2+x+2}$

1) Justifier que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$
2) Calculer $g'(x)$
3) Étudier le signe de cette dérivée et en déduire le tableau des variations de g sur $\mathbb{R}$

EXERCICE 7 Soient A, B et C les points de coordonnées respectives (1, - 1), (−2, 2) et (4, 3) dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{i}, \vec{j}$).

1) Démontrer que A, B et C ne sont pas alignés (une démonstration par le calcul est attendue, une simple observation graphique relève de la conjecture et n'est pas une preuve).
2) Calculer de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ (ce sera l'occasion si besoin de revoir la définition puis les différentes expressions du produit scalaire)
3) En déduire une valeur exacte de $cos(\widehat{BAC})$.
4) Donner alors à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au degré près de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.