RAPPELS : Produit scalaire dans le plan

1) Définition

Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs NON NULS du plan, le produit scalaire de $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ se note $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ et est égal au REÉL $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,,\vec{v})$.

En particulier $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

Rq1 : Si $\vec{u}$ *ou* $\vec{v}$ est le vecteur nul alors le produit scalaire est égal à 0 : $\vec{0}\,.\,\vec{v} = 0$ et $\vec{u}\,.\,\vec{0} = 0$
Rq2 : $\vec{u}\,.\,\vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}\,,\vec{u}) = \|\vec{u}\|^2$ que l'on appelle le carré scalaire et que l'on peut noter $\vec{u}^2$

2) Propriétés

Le produit scalaire est commutatif : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$
Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition : $\vec{u}\,.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$
Le produit scalaire est bilinéaire : $k(\vec{u}\,.\,\vec{v}) = (k\vec{u}).\,\vec{v} = \vec{u}\,.\,(k\,\vec{v}) = k\,\vec{u}\,.\,\vec{v}$

Cq : on peut alors développer $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{v}^2$ et avoir une autre expression du produit scalaire : $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$;
on ferait la même démarche avec $(\vec{u} - \vec{v})^2$

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

3) Orthogonalité

Deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$

Rq : le vecteur nul est donc orthogonal à tous les vecteurs

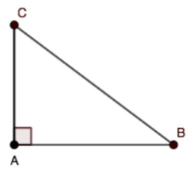
4) Projection orthogonale

Soient A,B et C trois points distincts ; $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH} = \pm AB \times AH$ où H est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).

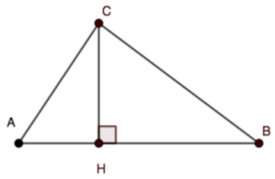
Examinons les deux cas où les points sont alignés :

- A, B et C sont alignés dans cet ordre :
$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(0) = AB \times AC \times 1 = AB \times AC$$
- C, A et B sont alignés dans cet ordre :
$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\pi) = AB \times AC \times (-1) = -AB \times AC$$

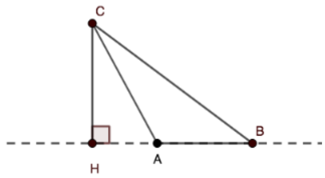
Examinons alors les trois cas suivants :



$\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC} = 0$



$\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$



$\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$

5) Dans un repère orthonormé

Dans un repère orthonormé la distance entre les points A(x_A, y_A) et B(x_B, y_B) est :

$$\boldsymbol{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

En utilisant les « formules » qui permettent de calculer les normes (calcul de distance) dans un repère orthonormé nous avons :

$$\boldsymbol{\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} . \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'}$$

DEVOIR DE VACANCES DE MATHEMATIQUES À RENDRE LE JOUR DE LA PRÉRENTRÉE

EXERCICE 1

Le 1er janvier 2023 la somme de 1820€ est placée à intérêts composés sur un livret A, rémunéré au taux annuel de 3% : chaque année les intérêts génèrent des intérêts à leur tour. De plus on décide de placer tous les ans au premier janvier une partie des étrennes reçues à Noël à savoir 300€.

On note U_n le montant sur le livret A le 1er janvier de l'année 2023+n pour tout entier naturel n. On a donc $U_0 = 1820$

1) Déterminer les valeurs de U_1 et U_2 en détaillant vos calculs.
2) Démontrer (en détaillant à nouveau) que $U_{n+1} = 1{,}03U_n + 300$ pour tout entier naturel n
3) Voici un algorithme :

```
def mystere(n):
    u=1820
    for i in range(n):
        u=1.03*u+300
    return(u)
```

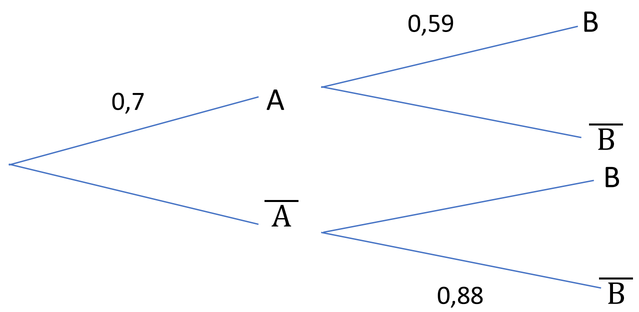
   Préciser quel est son rôle et donner la valeur donnée en sortie si on fait fonctionner mystere(10).

4) On pose maintenant $V_n = U_n + 10000$
   a) Montrer que $V_{n+1} = 1{,}03\ V_n$
   b) En déduire la nature de la suite (V_n) puis donner la forme explicite de V_n
   c) En déduire la forme explicite de U_n
   d) Calculer alors à l'euro près la somme obtenue le 1er janvier 2050.
5) Recopier et compléter les lignes 4 ;5 et 7 de l'algorithme suivant en python disant à partir de quelle année la somme obtenue dépasse le plafond du livret A fixé à 22950€.

```
def seuil():
    u=1820
    n=0
    while  ................... :
        u=................
        n=n+1
    return ...
```

6) Le faire fonctionner et donner la réponse obtenue.

EXERCICE 2 Voici un arbre de probabilité, vous donnerez dans un premier temps les valeurs exactes et dans un second temps les valeurs approchées au millième.



1) Définir les trois valeurs présentes dans l'arbre par leur probabilité (0,7 = P(?) ...)
2) Recopier et compléter l'arbre.
3) Calculer en détaillant votre démarche la probabilité de B : P(B)
4) Calculer alors la probabilité conditionnelle $P_B(A)$

EXERCICE 3 A et B sont deux évènements de probabilité non nulle.

On sait que $P_A(B) = 0{,}3\ ; P(A \cap B) = 0{,}06\ et\ P(B) = 0{,}78$
Déterminer alors en justifiant $P(A)\ et\ P_{\overline{A}}(B)$

EXERCICE 4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f$(x) = 1 - x + e^x$

1) Calculer f '(x)
2) Résoudre f '$(x) \geq 0$
3) En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$
4) En déduire le signe de f(x) sur $\mathbb{R}$

EXERCICE 5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f$(x) = -x^3 + 12x^2 - 36x + 2$

1) Calculer f '(x)
2) Étudier le signe de cette dérivée et faire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$
3) Écrire l'équation réduite de la tangente T au point d'abscisse – 1 .

EXERCICE 6 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par g$(x) = \frac{-2x+2}{x^2+x+2}$

1) Justifier que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$
2) Calculer g '(x)
3) Étudier le signe de cette dérivée et en déduire le tableau des variations de g sur $\mathbb{R}$
4) Écrire l'équation réduite de la tangente T au point d'abscisse 0.

EXERCICE 8 Soient A, B et C les points de coordonnées respectives (1, – 1), (−2, 2) et (4, 3) dans le plan muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).

1) Démontrer que A, B et C ne sont pas alignés (une démonstration par le calcul est attendue, une simple observation graphique relève de la conjecture et n'est pas une preuve).

2) Calculer de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ (ce sera l'occasion si besoin de revoir la définition puis les différentes expressions du produit scalaire, vous trouverez ce rappel en pièce jointe avec en vert les égalités utiles à cet exercice et vous calculerez donc :
   - Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$
   - Les distances AB et AC
   - Le produit scalaire à l'aide du calcul valable dans un repère orthonormé
3) En déduire une valeur exacte de $cos\left(\widehat{BAC}\right)$.
4) Donner alors à l'aide de la calculatrice une valeur approchée au degré près de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.