DIRE ET ÉCRIRE EN MATHÉMATIQUES

la place du langage dans la construction des connaissances mathématiques à l'école

Thierry DIAS, *HEP Vaud, Lausanne*
thierry.dias@hepl.ch
http://perso.orange.fr/dias.thierry/

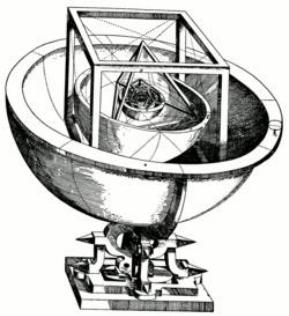
hep/ haute école pédagogique vaud

La tribu des maths — MAGNARD

Les mathématiques sont d'abord une science qui nous apprend des choses sur le monde.

Expérimenter dans le monde, c'est traduire le réel par des signes.

Traiter ces signes, c'est faire des mathématiques.



ma devise

Faire des maths,

→ création, production, fabrication

Faire faire des maths,

→ développer l'activité de pensée

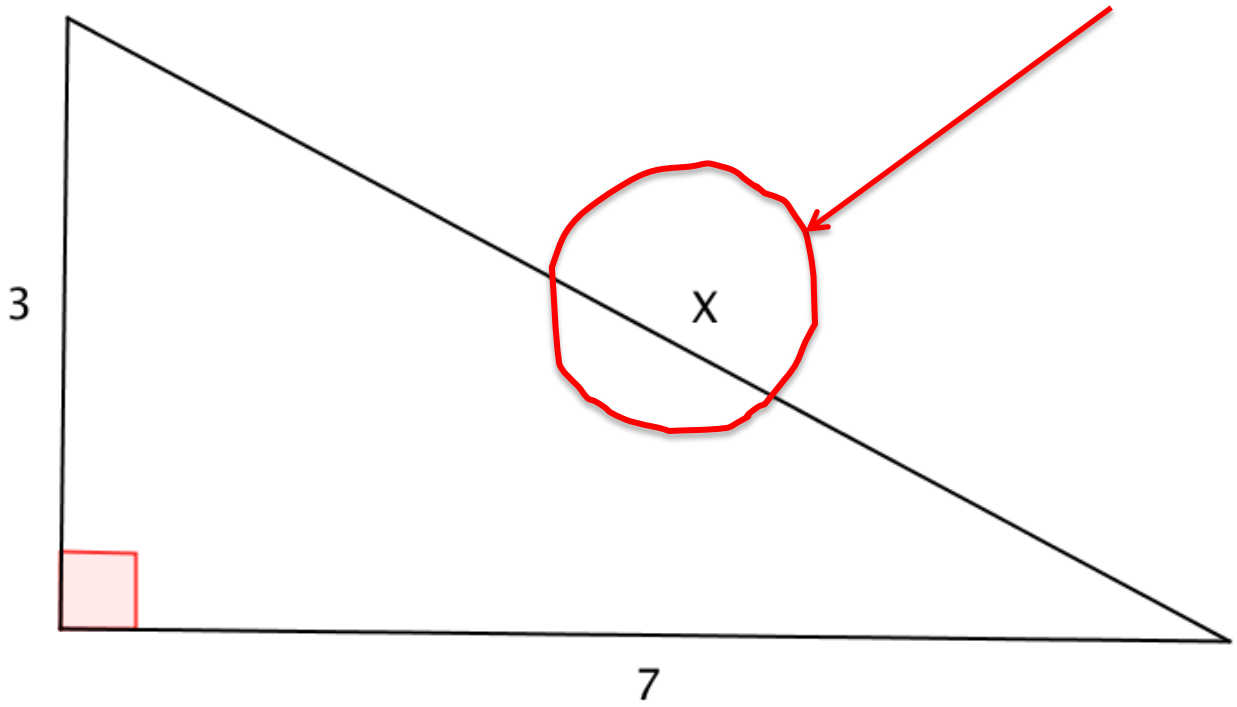
Regarder ce que ça donne…

→ privilégier une pédagogie réflexive

une question de langage ?

chercher x

il est là



1. **Apprendre / enseigner en mathématiques**

   connaissances et attitude

2. **Langage et mathématiques**

   situation didactique

   place de la langue (*vocabulaire, sens, syntaxe)*

3. **Difficultés principales**

   échanger

   signe et objet

   vocabulaire

4. **On peut le faire !**

   décrire

   lire

   échanger

   écrire

CHAPITRE 1

ENSEIGNER / APPRENDRE EN MATHÉMATIQUES

développer une culture scientifique :

des connaissances et des attitudes

un brin d'histoire, *Instructions Officielles, France, janvier 1957*

"N'est-il pas indispensable de faire bien saisir à l'enfant, puis à l'adolescent, **les liens étroits qui unissent les mathématiques au monde sensible**.

N'est-ce pas là un moyen pour mettre en confiance le débutant, pour éviter qu'il ne se sente très vite rebuté par une étude où il pourrait ne voir qu'**une sorte de jonglerie, souvent purement verbale et sans signification apparente**. »

L’apprentissage des mathématiques développe :

- **l’imagination,**
- **la rigueur et la précision,**
- **ainsi que le goût du raisonnement.**

apprendre en mathématiques

construire une **culture scientifique**

des connaissances

des capacités

des attitudes

référence : socle commun

savoirs faire

construire des capacités

des méthodes, des techniques

une culture scientifique à l'école

savoirs être

développer des attitudes

- raisonnement, recherche
- pensée critique

savoirs

acquérir des connaissances

des concepts, des objets, des relations

3 ATOUTS POUR MIEUX APPRENDRE

EN MATHÉMATIQUES

des situations d'apprentissage et des problèmes avec :

- du matériel pour agir,
- des questions à expérimenter,
- des situations qui ont du sens.

→ **connaissances en actes**

de la place pour les **activités langagières** :

- mettre en mots, décrire,
- faire des hypothèses, confronter des idées
- anticiper les faits.

→ **connaissances en mots**

s'entraîner pour :

- "roder son moteur" (faire et refaire)
- travailler à son rythme, à son niveau de compétence
- se dépasser, défier

→ **utilisation des connaissances**

construire des connaissances

à l’école primaire, on ne vise pas l'acquisition de connaissances formelles, mais principalement des connaissances fonctionnelles…

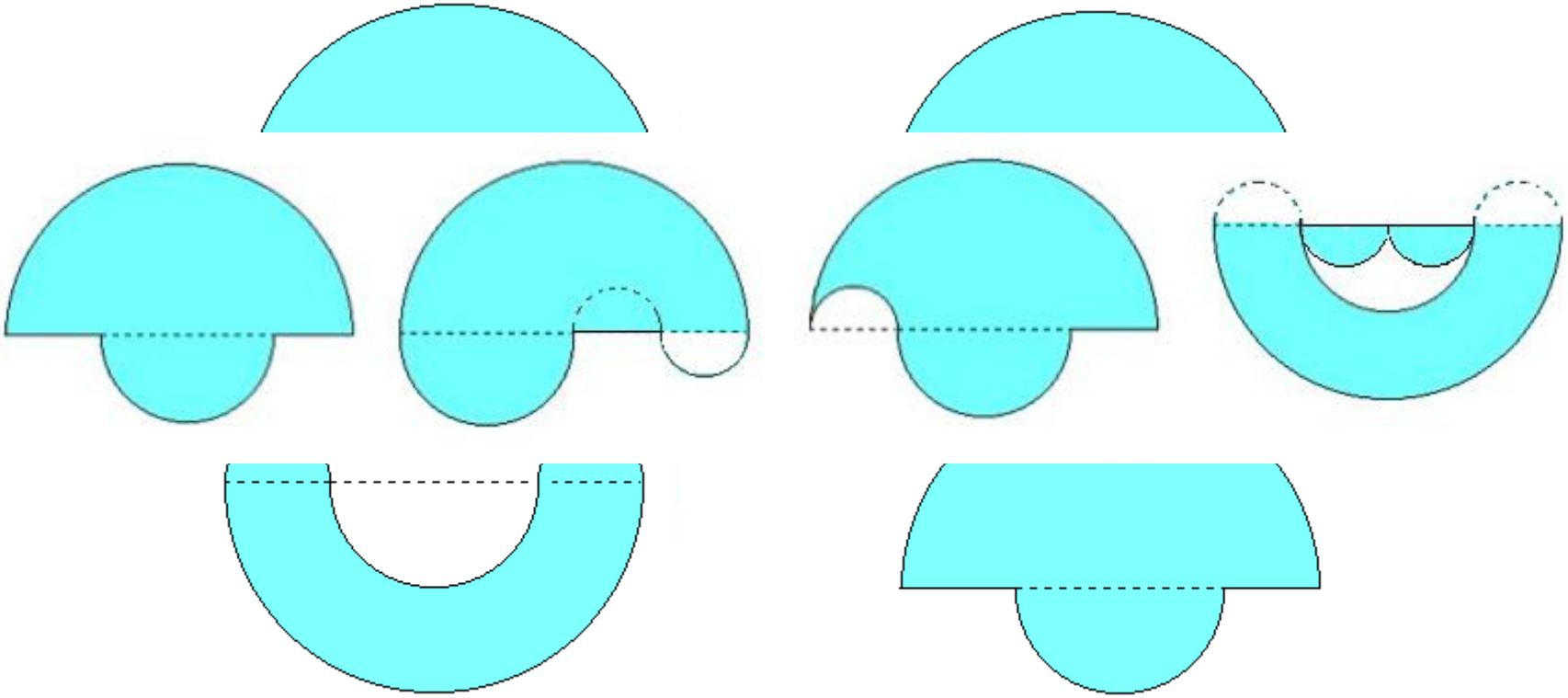
… utiles pour résoudre des problèmes

construire des connaissances

savoirs faire

savoirs

Loubna veut creuser un bassin dans son jardin. Elle a fait quatre dessins différents parmi lesquels elle doit maintenant choisir celui qui a la plus petite aire.



Quel est le bassin qui a la plus petite aire ?

hep MAGNARD

ne pas oublier de développer des attitudes

La science ne poursuit jamais l'objectif illusoire de rendre ses réponses définitives ou même probables. Elle s'achemine plutôt vers le but de toujours découvrir des problèmes nouveaux, et de soumettre ses réponses, toujours provisoires, à des tests toujours renouvelés et toujours affinés. »

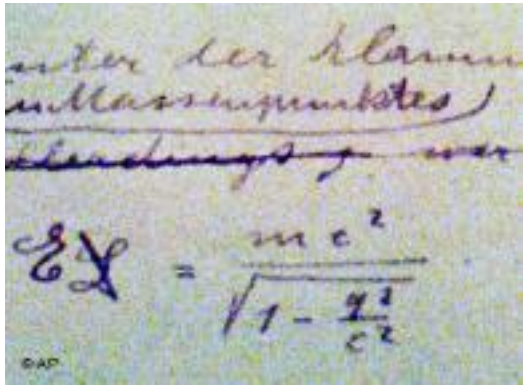
Karl R. POPPER, 1934, *La logique de la découverte scientifique*

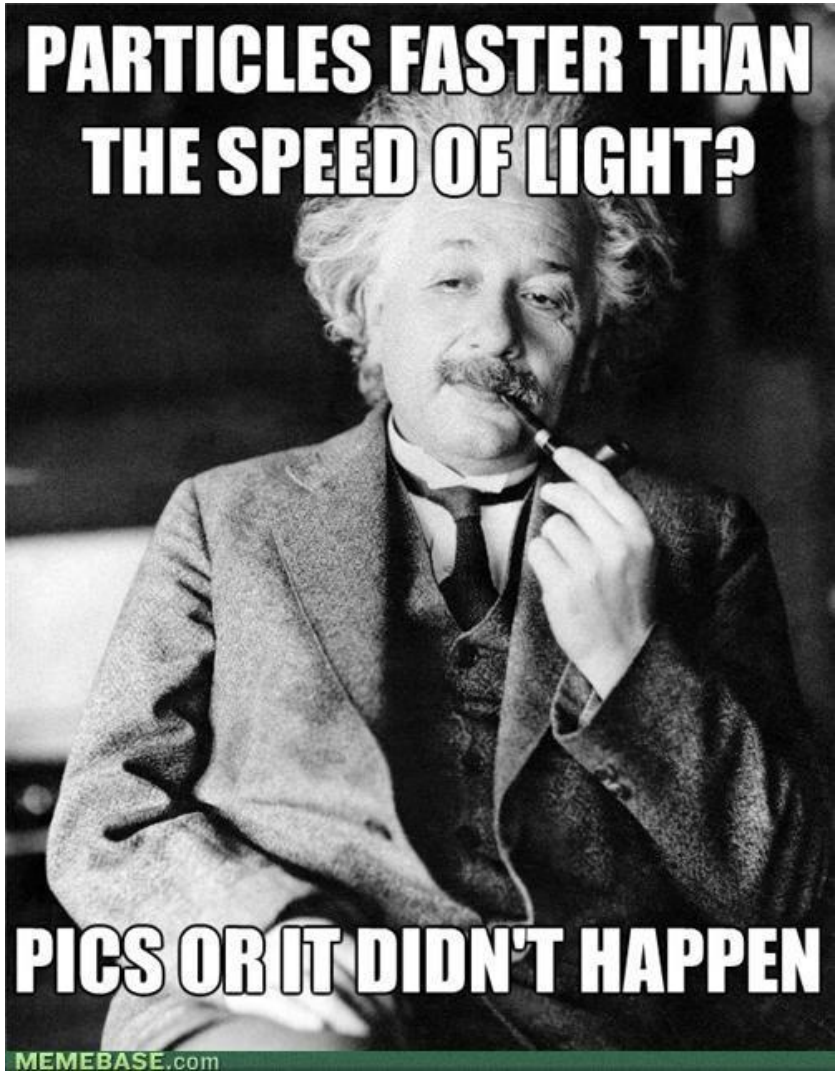
développer des attitudes

La science ne poursuit jamais l'objectif illusoire de rendre ses réponses définitives ou même probables. Elle s'achemine plutôt vers le but de toujours découvrir des problèmes nouveaux, et de soumettre ses réponses, toujours provisoires, à des tests toujours renouvelés et toujours affinés. »

Karl R. POPPER, 1934, *La logique de la découverte scientifique*

développer des attitudes

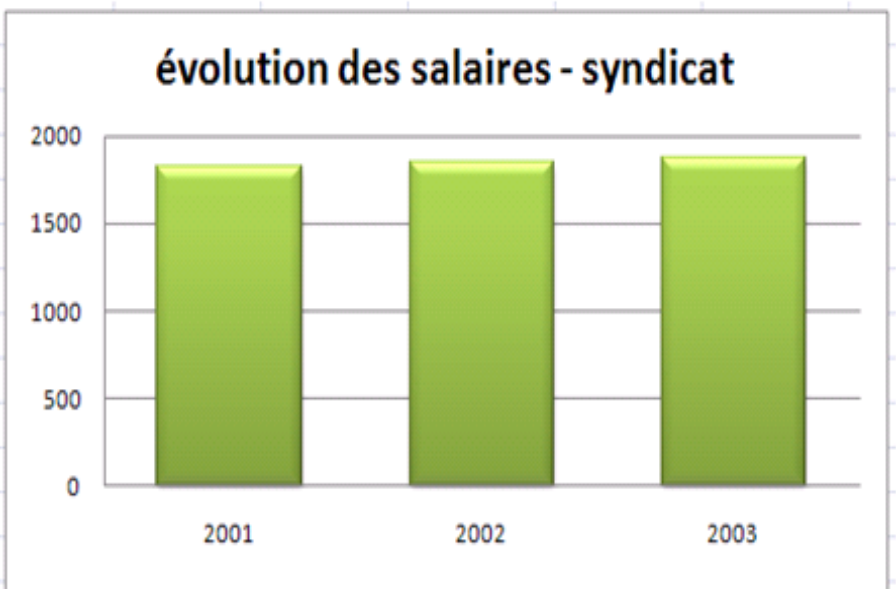




Doute
Incertitude
Contradiction
Débat
Remise en questions

le recours aux mathématiques, pour développer le raisonnement, la pensée critique…

comment représenter la variation entre 1820 € et 1870 € ?



CHAPITRE 2

LANGAGE ET MATHÉMATIQUES

place du langage dans la construction des connaissances

notion de situation didactique

spécificité du langage en mathématiques ?

Place du langage dans la construction des connaissances

Parler, dire et écrire pour

APPRENDRE

hep/ MAGNARD

Maîtrise du langage

Introduction *(programmes 2002 page 165)*

La maîtrise du langage et de la langue française n'étant jamais définitivement atteinte…

…l'ensemble des capacités qui permettent à un élève :

MAÎTRISE DU LANGAGE

de bénéficier pleinement des **échanges oraux** qui ont lieu dans la classe à propos de **tous les aspects du programme**,

de **lire en les comprenant**, les textes supports de toutes les activités proposées,

de se servir de **l'écriture pour organiser les connaissances**, pour les mémoriser et pour manifester par écrit ce qui en a été compris et acquis.

hep/ MAGNARD

Parler, lire, écrire en mathématiques

(2002)

L'un des objectifs de l'enseignement des mathématiques est aussi, au côté des autres disciplines, de contribuer au développement des compétences dans le domaine de la langue orale et écrite, tout en travaillant les spécificités du langage mathématique : vocabulaire, symboles, schémas, graphiques.

hep/ MAGNARD

Socle commun de connaissances et compétences

(2006)

Faire accéder tous les élèves à la maîtrise de la langue française, à une expression précise et claire à l'oral comme à l'écrit, relève de l'enseignement du français mais aussi de toutes les disciplines.

…l'ensemble des capacités qui permettent à un élève :

MAÎTRISE DU LANGAGE

de bénéficier pleinement des **échanges oraux** qui ont lieu dans la classe à propos de **tous les aspects du programme**,

de **lire en les comprenant**, les textes supports de toutes les activités proposées,

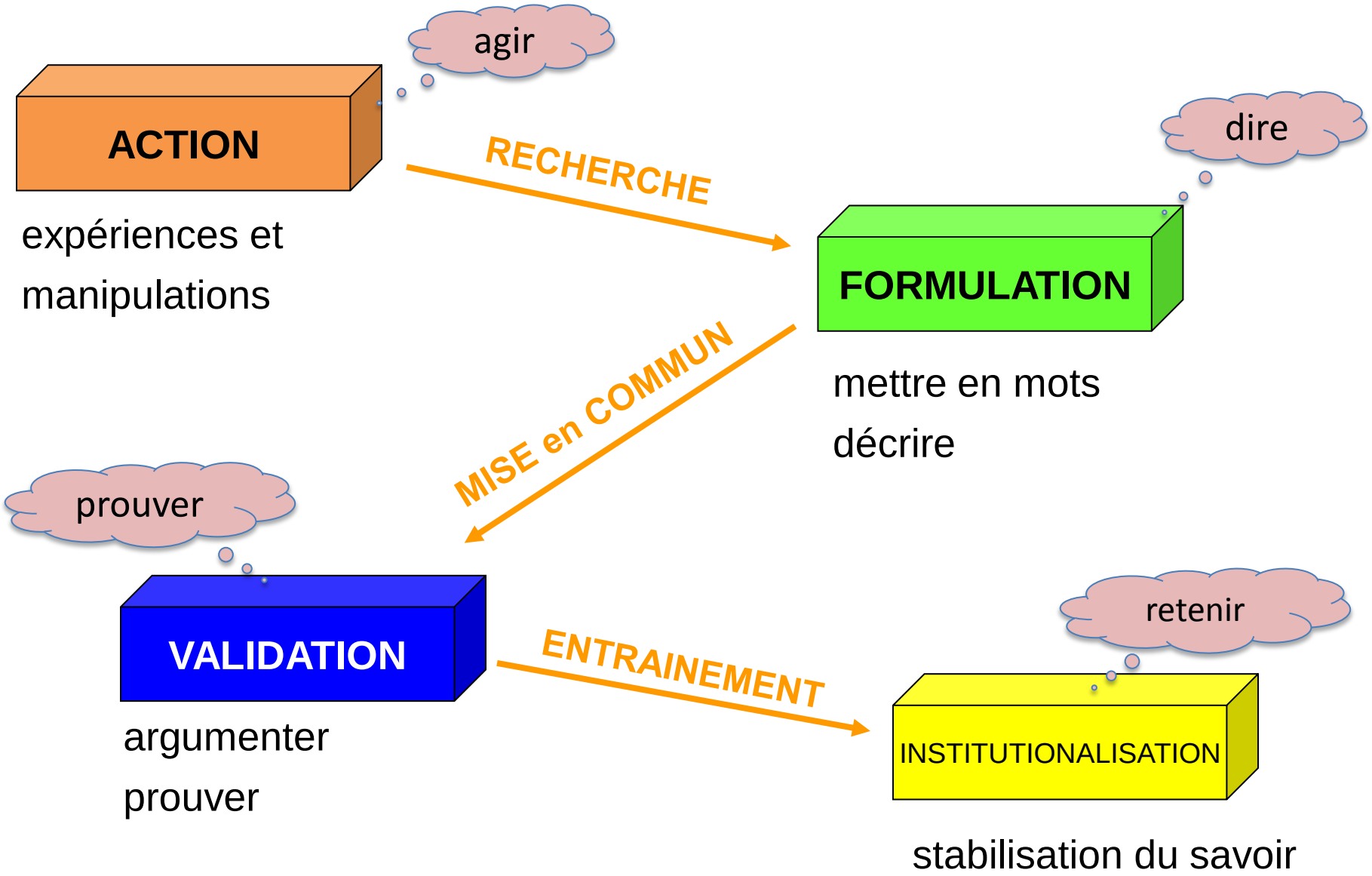
de se servir de **l'écriture pour organiser les connaissances**, pour les mémoriser et pour manifester par écrit ce qui en a été compris et acquis.

hep/ MAGNARD

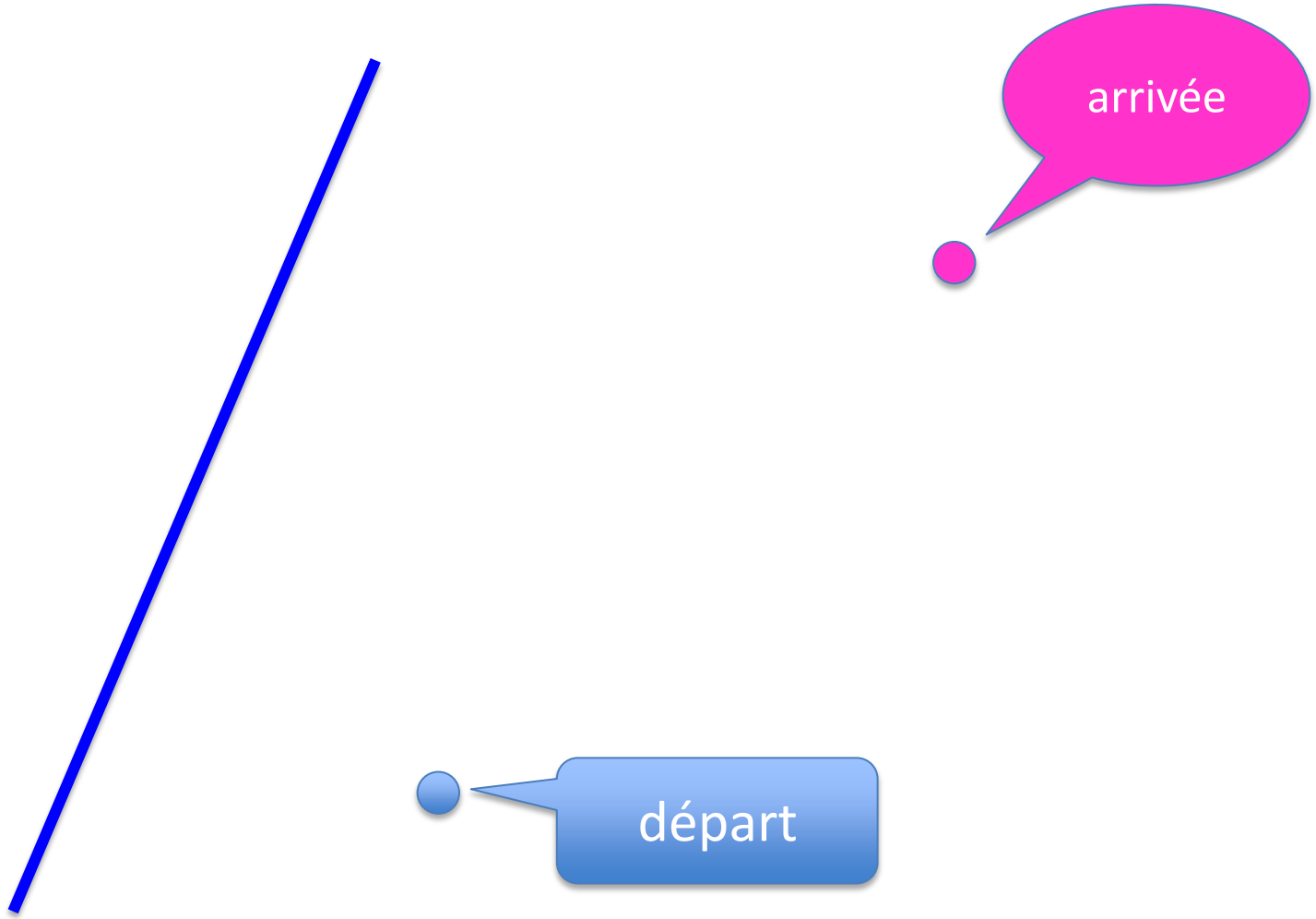
Didactique des mathématiques

DIRE, LIRE ET ÉCRIRE

hep/ MAGNARD


agir
ACTION
expériences et
manipulations
RECHERCHE
dire
FORMULATION
mettre en mots
décrire
MISE en COMMUN
prouver
VALIDATION
argumenter
prouver
ENTRAINEMENT
retenir
INSTITUTIONALISATION
stabilisation du savoir

le plus court chemin en touchant le mur ?

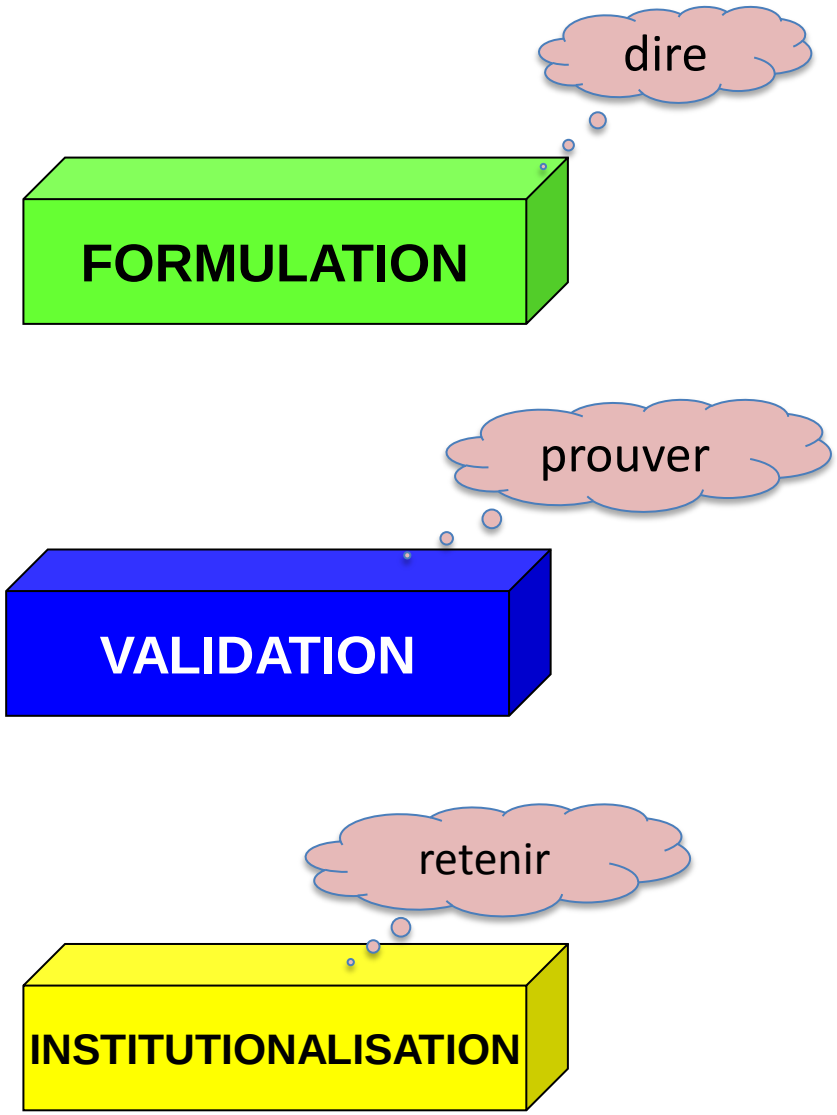


agir

dire

prouver

retenir



langage spontané en situation

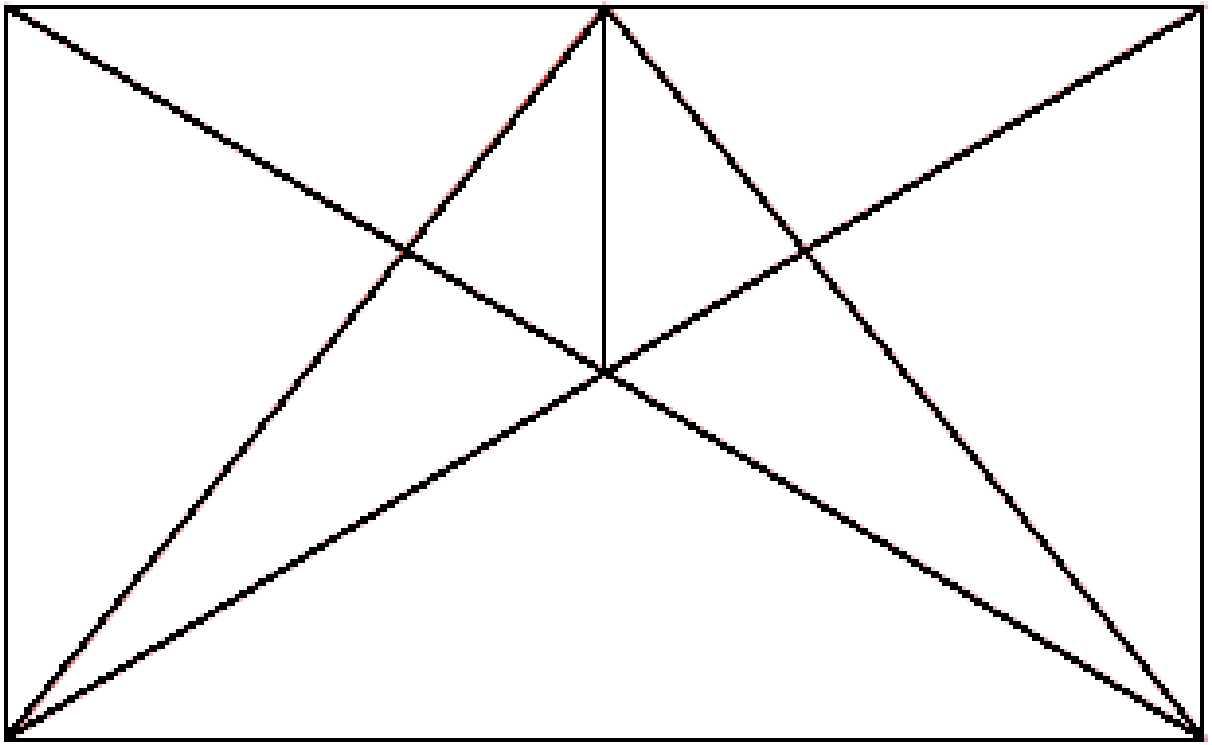
langage progressivement étayé et enrichi

langage précis respectant des conventions

temps de parole

		enseignant	élèves
FORMULATION	langage spontané en situation		
VALIDATION	langage progressivement étayé et enrichi		
INSTITUTIONALISATION	langage précis respectant des conventions		

Combien pouvez-vous trouver de triangles à l'intérieur de cette figure ?

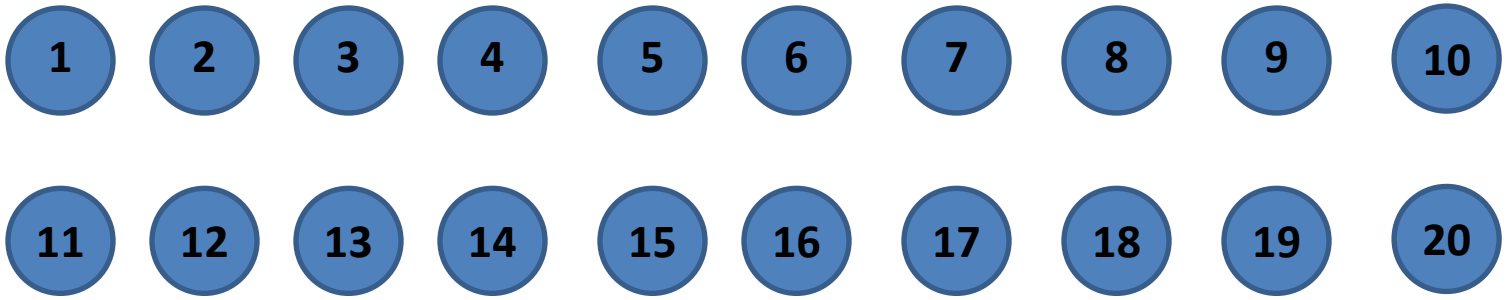


FORMULATION

VALIDATION

INSTITUTIONALISATION

Qui prendra le 20ème jeton ?



Jeu à deux : chacun à son tour prend 1 ou 2 jetons.

Le joueur qui prend le n° 20 gagne la partie.

Existe-t-il un langage spécifique aux mathématiques ?

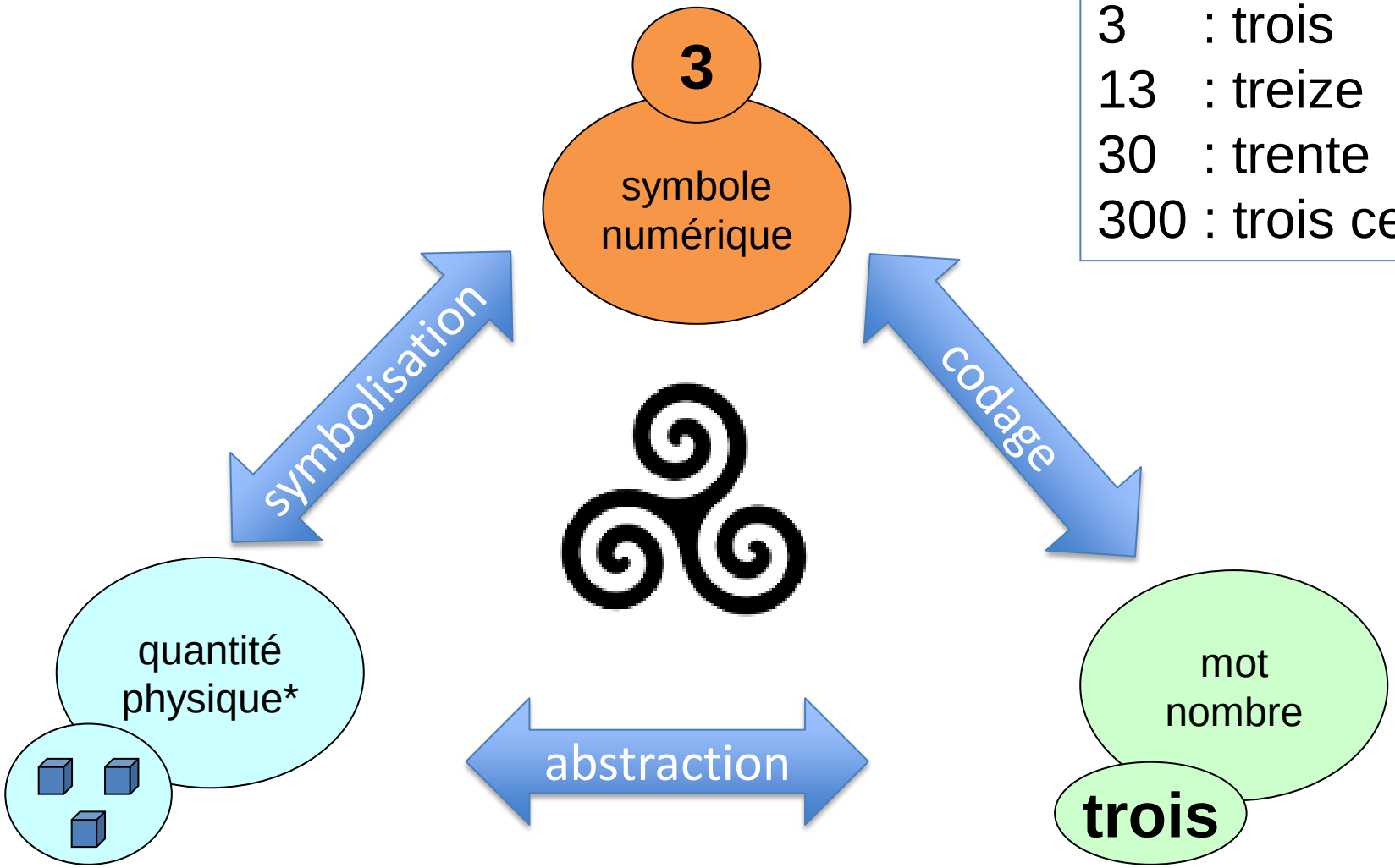
des signes, des mots et des règles

REPRÉSENTER LES OBJETS MATHÉMATIQUES

représenter un objet mathématique

règles

3 : trois
13 : treize
30 : trente
300 : trois cents



"triple code"

$$2+3=5$$

$$x^2+\frac{x}{5}-17=0$$

$$\sqrt{3+x}$$

$$\int_a^b (3x-7)\,dx$$

L'écriture symbolique des mathématiques doit s'apprendre progressivement.

Cet apprentissage comprend trois dimensions : **vocabulaire**, **sens** et **syntaxe**.

hep/ MAGNARD

vocabulaire

L’acquisition du vocabulaire accroît la capacité de l’élève à se repérer dans le monde qui l’entoure, à mettre des mots sur ses expériences, ses opinions et ses sentiments, à comprendre ce qu’il écoute et ce qu’il lit, et à s’exprimer de façon précise et correcte à l’oral comme à l’écrit.

On n'apprend pas une langue par le seule capitalisation d'un vocabulaire.

un exemple avec les programmes du C3

CE2

Utiliser en situation le vocabulaire :

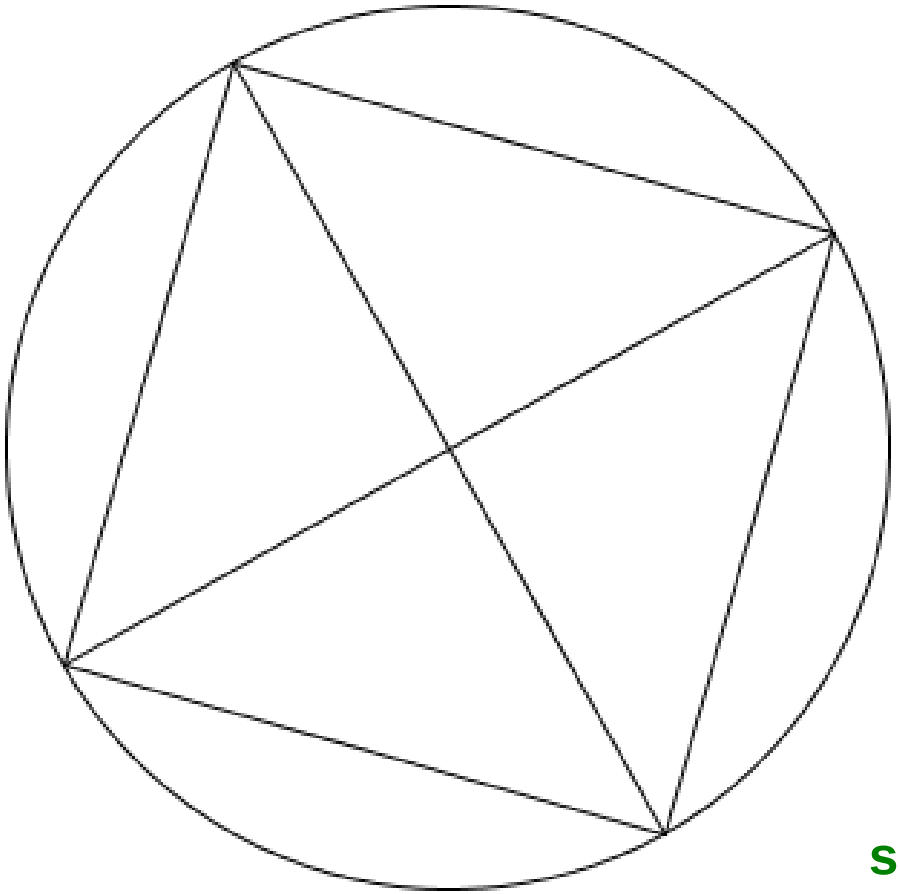
côté, sommet, angle, milieu.

CM1

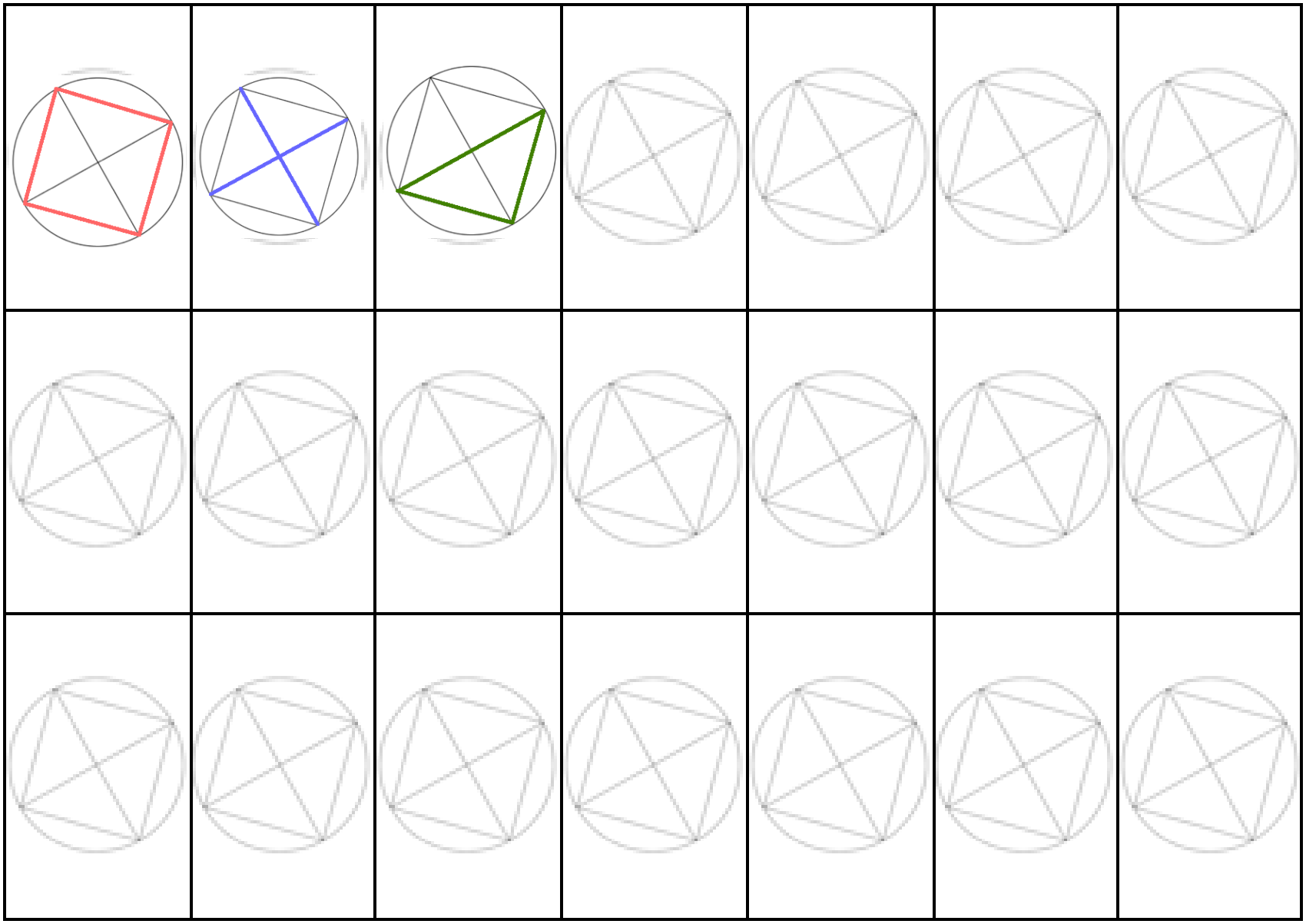
Utiliser en situation le vocabulaire géométrique :

points alignés, droite, droites perpendiculaires, droites parallèles, segment, milieu, angle, axe de symétrie, centre d'un cercle, rayon, diamètre.

décrire :
utiliser un lexique en situation



angle droit
arc de cercle
axe de symétrie
carré
centre
cercle
côté
diagonale
diamètre
intersection
parallèle
parallélogramme
perpendiculaire
points alignés
rayon
rectangle
segment
sommet
triangle
triangle isocèle
triangle rectangle



sens

comprendre :

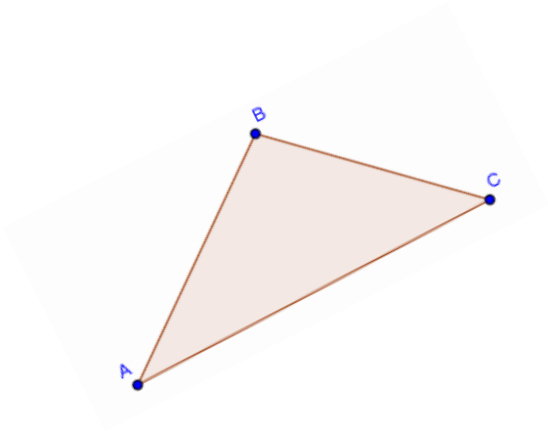
utiliser des connaissances
mobiliser des savoirs faire
mettre en lien
raisonner

un même mot, plusieurs choses…

spécificité des contextes d'expression

Qu'est-ce qu'un sommet ?

*Un seul **sommet** par montagne : il est situé en haut par définition.*



*Trois **sommets** dans un triangle : sans lien avec l'orientation de la figure.*

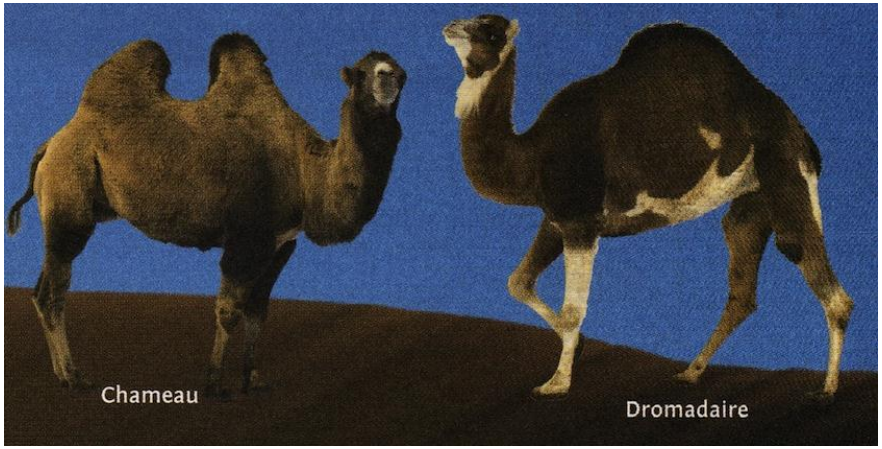
un même mot : plusieurs sens

effet de contexte

Que veut dire "être droit" ?

langage naturel	le mot ***droit*** peut s'opposer à ***penché*** : en référence à se tenir droit
géométrie	***droit*** signifie ***aligné***, si l'on parle d'un trait on peut donc dire à la fois droit et penché
mesure angulaire	droit caractérise une certaine ouverture de l'angle qui se mesure 90 en degrés

le sens des mots
le sens des phrases



Un parc animalier achète des dromadaires et des chameaux.

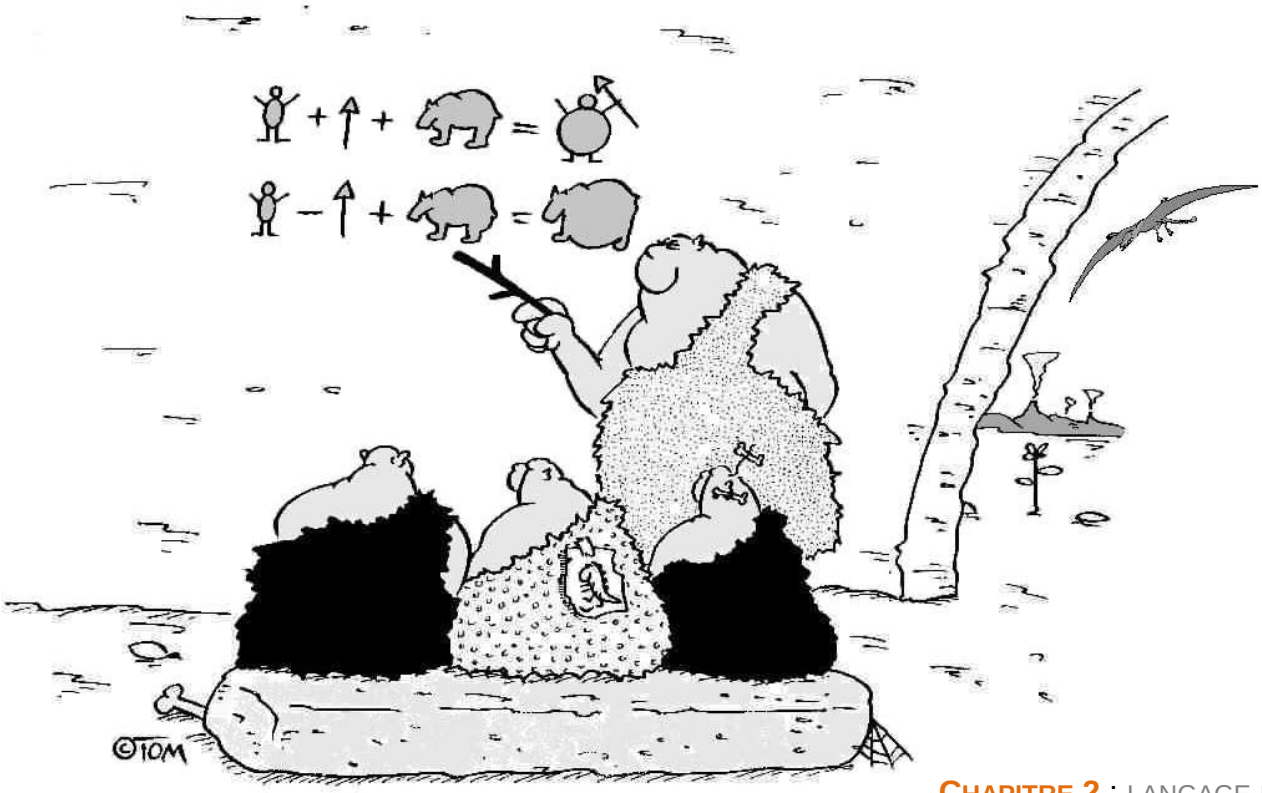
A leur arrivée, on peut compter 9 bosses et 20 pattes.

Combien y a-t-il de chameaux et de dromadaires ?

syntaxe

se faire comprendre :

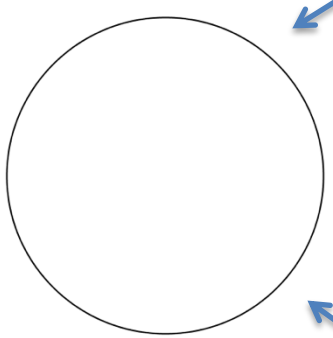
- en respectant des règles
- en utilisant des conventions d'écriture



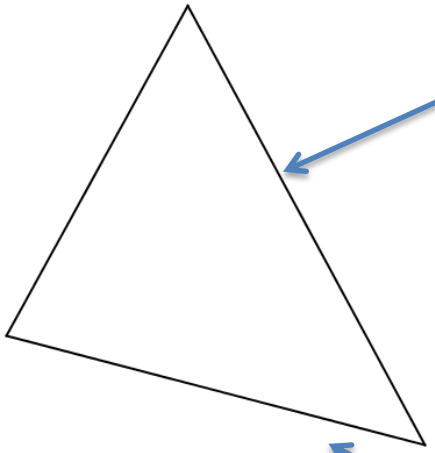
Les règles et les conventions permettent la communication entre individus qui doivent se comprendre.

Elles peuvent alternativement :

- remplacer progressivement un langage spontané provisoire,
- précéder un langage inadapté, incorrect ou incohérent.



un rond est une dénomination provisoire acceptable elle sera remplacée progressivement par ***un cercle***

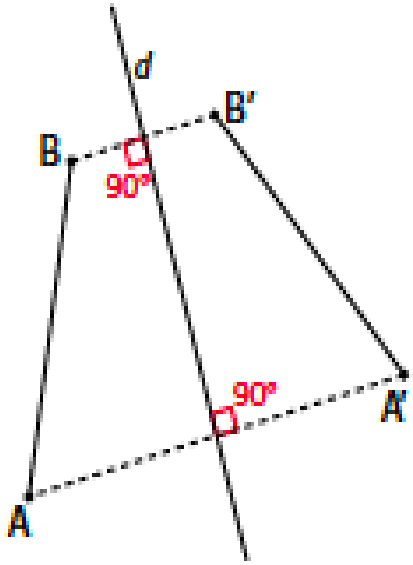


un carré est une dénomination erronée non acceptable elle doit être remplacée au plus tôt par ***un triangle***

Les règles d'écriture (ou de langage oral) concernent les articulations entre les mots.

Leur mise en œuvre ne doit pas attendre que des automatismes ou constructions erronées se stabilisent.

des mots à leur place, des conventions respectées : une institutionnalisation en fin de CM2



Le point B' est le ..... du point B par rapport à la droite ..... .

Le ..... [B'A'] est le ..... du segment ..... par rapport à la ..... (d).

Les segments [BB'] et [AA'] sont ..... entre eux et ..... à la droite (d).

La droite (d) coupe le segment [AA'] en son ..... .

Dans cette figure, on peut trouver ..... angles droits.

CHAPITRE 3

QUELQUES DIFFICULTÉS…

échanger,

signes et objets,

vocabulaire, sens et syntaxe

ÉCHANGER

Apprendre à plusieurs…

interactions sociales dissymétriques

Tout acte de communication basé sur des interactions entre individus comporte plusieurs dimensions :

- relationnelle,
- affective,
- psychologique.

Ces dimensions sont toutes susceptibles de masquer les capacités langagières.

l'activité mathématique dans la démarche de résolution de problème

difficultés d'apprentissage

chercher ensemble	accepter l'opinion d'autrui
dialoguer	comprendre et écouter
expliquer	assumer ses choix
interroger	exposer ses doutes
convaincre	se confronter aux autres

difficultés d'enseignement

incertitude

débat

contradictions

➡ pour l'enseignant comme pour l'élève cela signifie : "prendre des risques"

enseignement :
le contrôle de la situation est plus délicat du fait des interactions

apprentissage :
accepter l'inconnu du chemin à suivre et des connaissances en jeu

➡ Vers un rôle différent pour l'enseignant

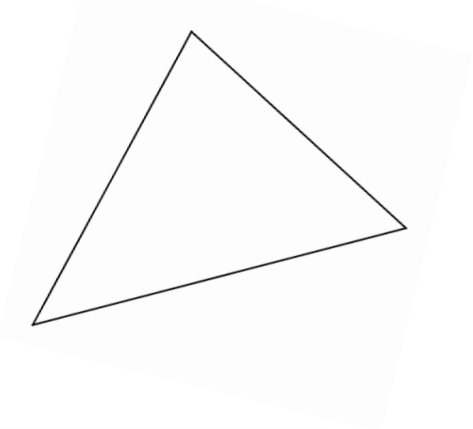
Enseigner les mathématiques c'est accompagner l'activité des élèves :

- les actes : observer
- les mots : écouter
- la pensée : comprendre

SIGNES ET OBJETS

hep/ MAGNARD

Les mathématiques existent à travers les signes qui représentent leurs objets.



Cette figure est un triangle particulier.

Ce n'est pas l'objet idéal ***triangle***.

difficulté :

Pour un même objet on peut utiliser plusieurs types de signes.

icône

symbole

indice

des signes différents pour un même objet (référent) :

icône	symbole	indice
	trois	$x - 3 = 0$
	3	$1 + 2$
représentation sous forme imagée proche du réel	représentation symbolique éloignée de la réalité	représentation qui suggère

VOCABULAIRE, SENS ET CONTEXTE

quelle difficulté : lecture et/ou mathématiques ??

À l'école les élèves sont fréquemment sollicités pour travailler sur des tâches qui leur sont communiquées par écrit.

Il faut veiller à ce que les difficultés de **lecture** ne viennent pas gêner les progrès en mathématiques dont les élèves sont capables.

Le travail mathématique devient possible au moment où l'élève a compris la situation évoquée et la question posée !

Lire en mathématiques

Un restaurateur achète des melons

qu'il a l'intention de servir par moitiés.

Il achète 8 caisses de 12 melons.

Il s'aperçoit qu'il doit jeter 4 melons

trop abîmés pour être servis.

Combien pourra-t-il servir de clients ?

vocabulaire

contexte

formulation

hep/ MAGNARD

CHAPITRE 4

ON PEUT LE FAIRE !

décrire

lire

échanger

écrire

pour chaque situation, *le mieux serait de…*

1. faire une analyse didactique

- compétences visées (lien avec les programmes)
- variables d'adaptation et de différenciation

(car tout le monde n'apprend pas à la même vitesse…)

2. prévoir les dispositifs

pédagogiques de travail

- travail individuel
- binômes
- groupes

3. programmer les activités

- nombre de séance
- lien avec les autres apprentissages

4. prévoir le matériel nécessaire :

la trousse du laboratoire de mathématiques…

Situations pour le développement des compétences langagières :

1. décrire des objets (géométriques) en utilisant un vocabulaire et une syntaxe progressivement acquis — jeux de langage
2. lire et comprendre pour développer des capacités de raisonnement — logique
3. échanger des idées similaires avec d'autres apprentis mathématiciens — communication
4. accéder progressivement à l'argumentation au sein de véritables débats scientifiques — débat
5. compiler ses aventures et ses découvertes — cahier de laboratoire

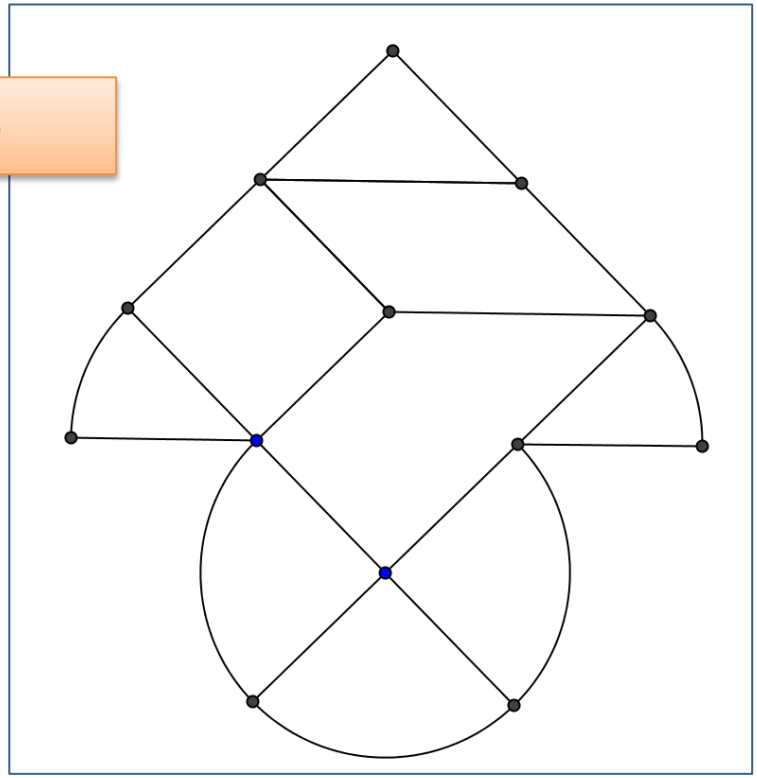
DÉCRIRE

Jeux de langage

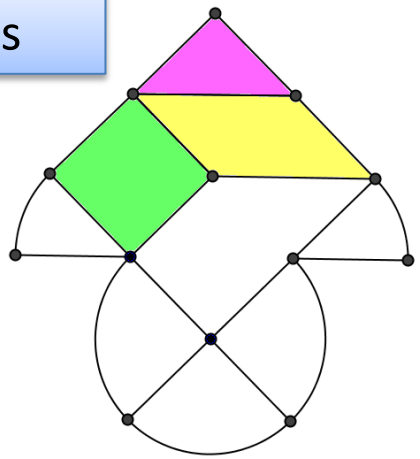
mettre en mots ses connaissances

hep/ MAGNARD

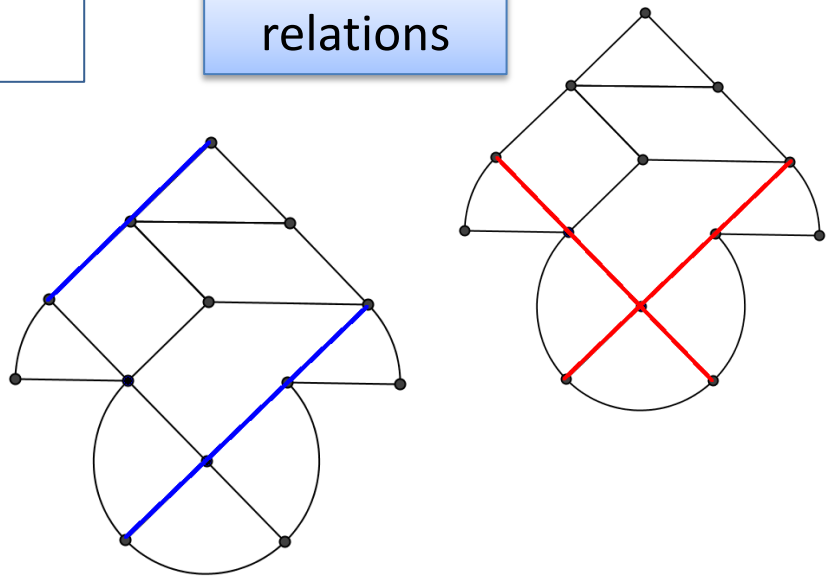
décrire



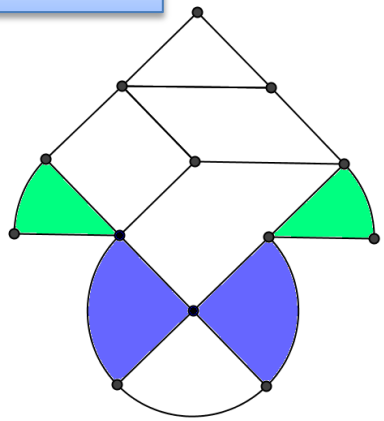
objets



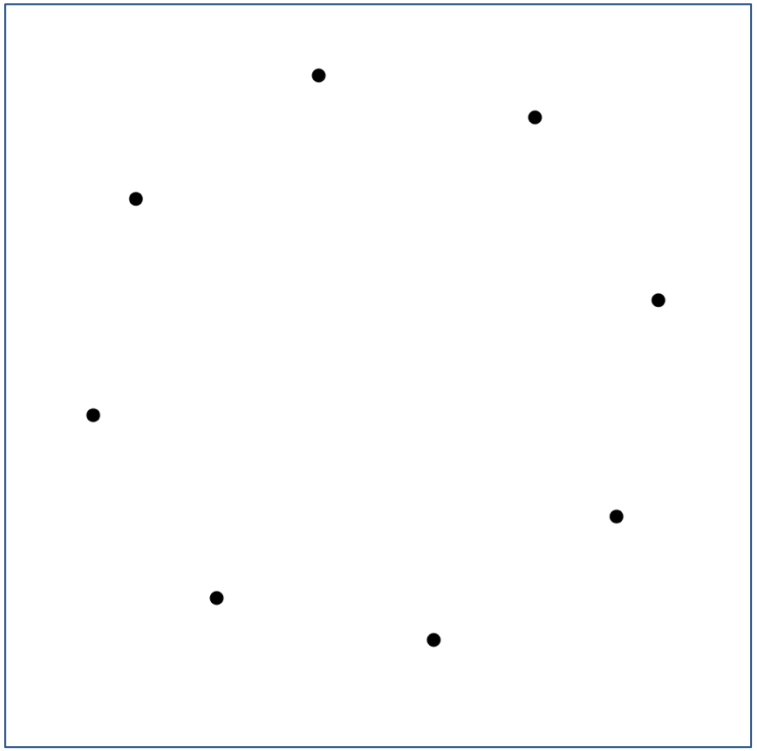
relations

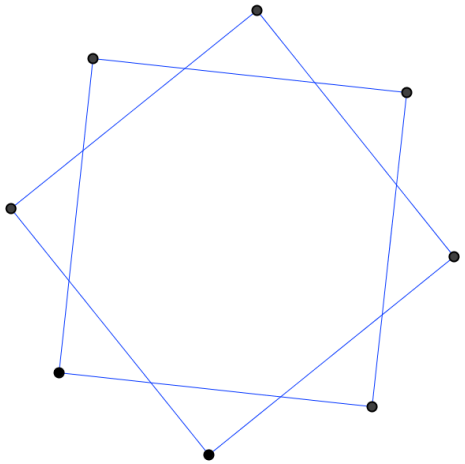


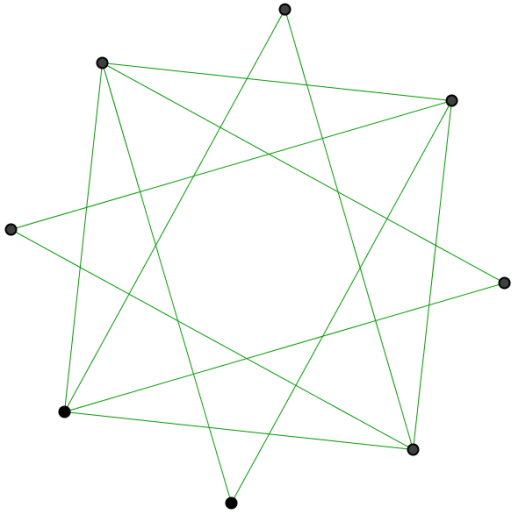
transformations

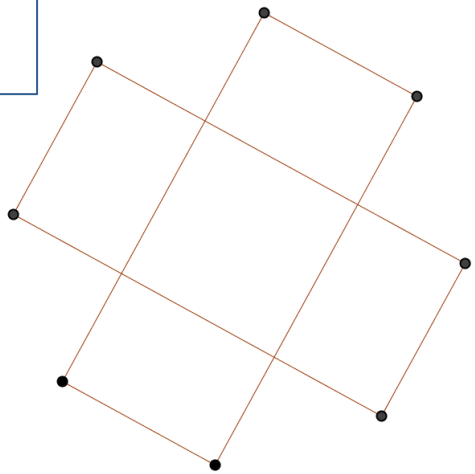


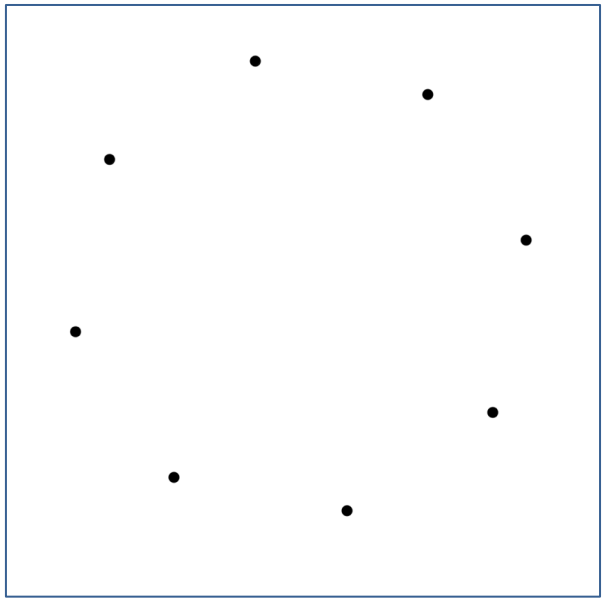
Tracer, puis décrire

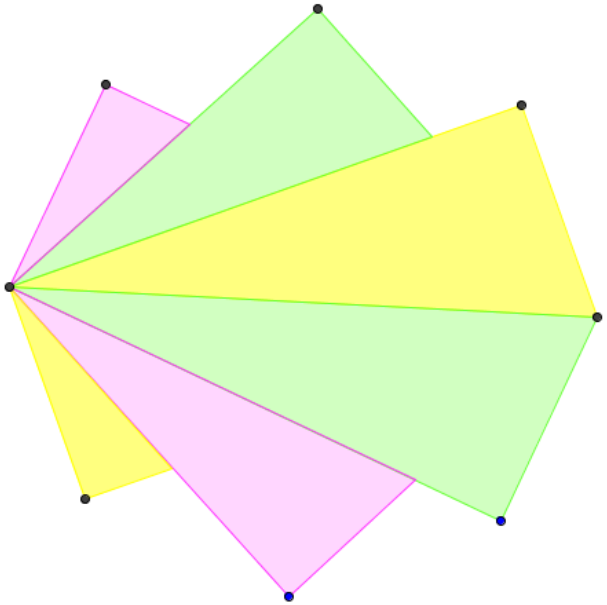


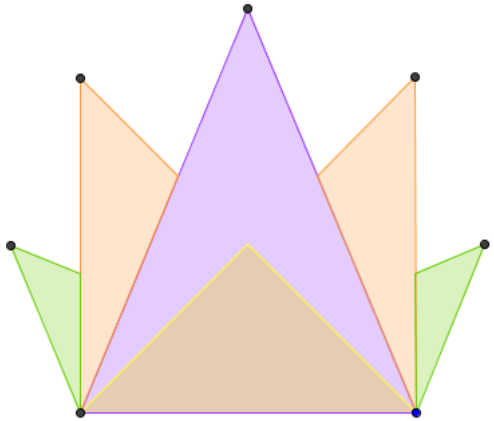


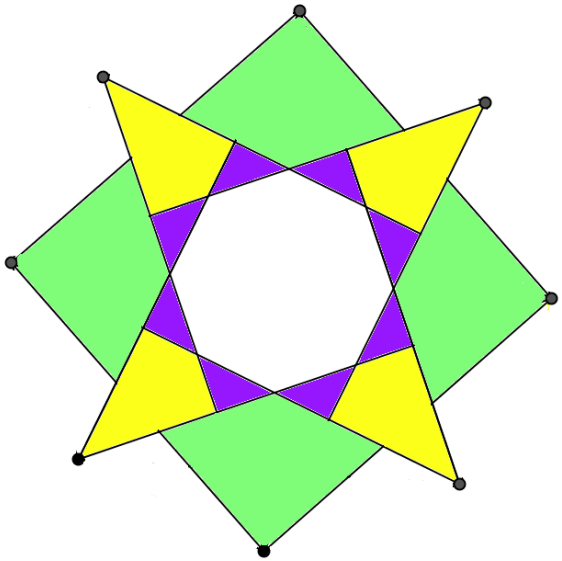




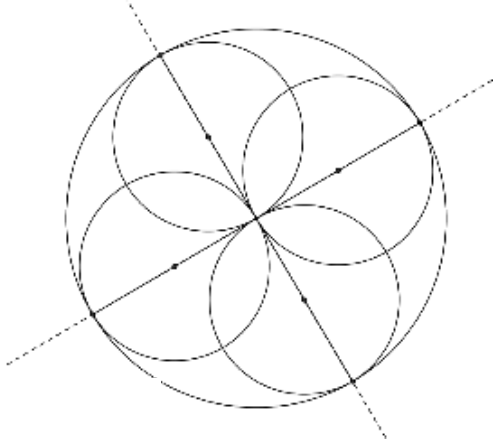


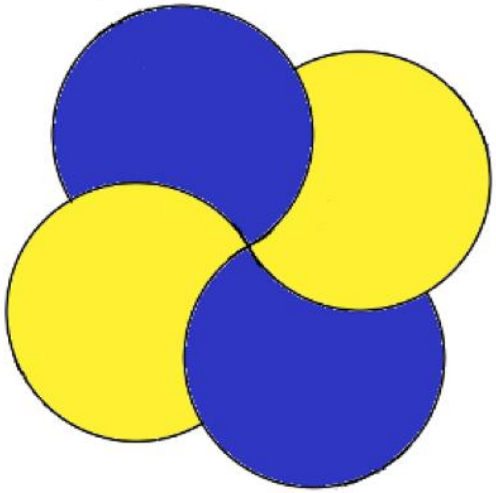


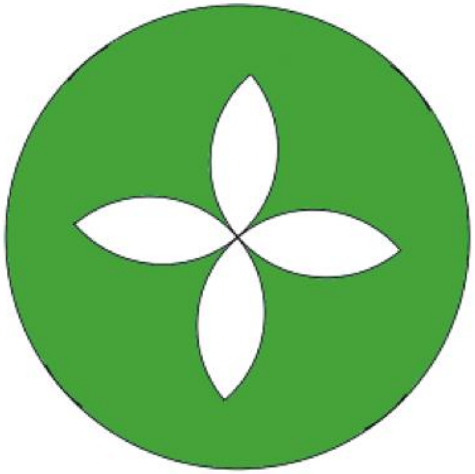




décrire, discuter

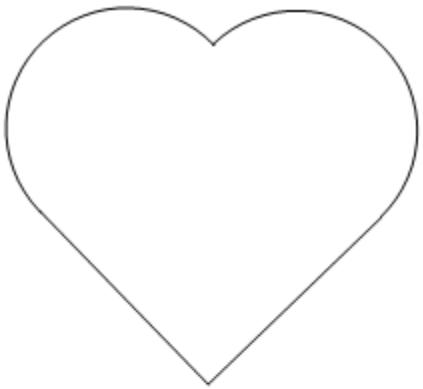


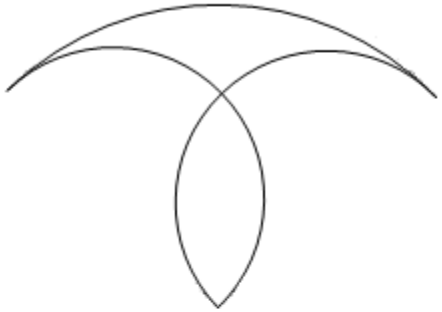


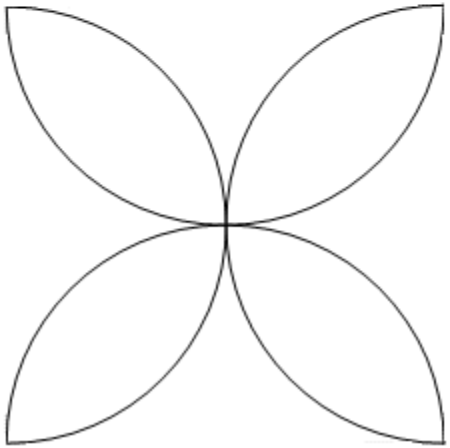


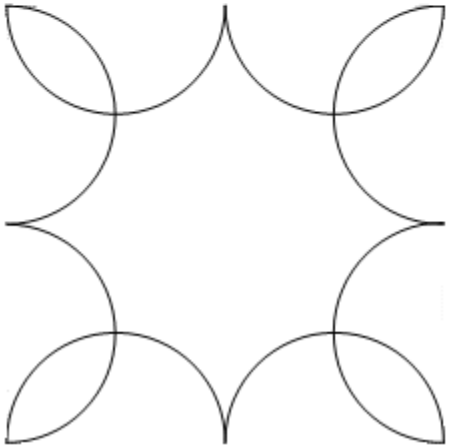
quels sont les éléments en commun de ces figures ?

décrire, discuter

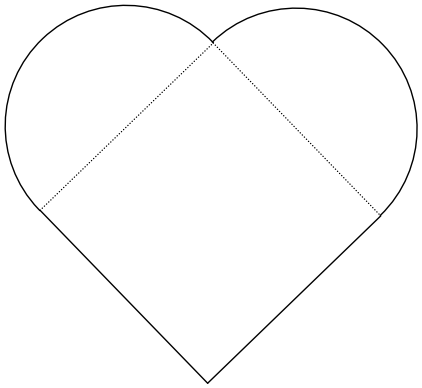


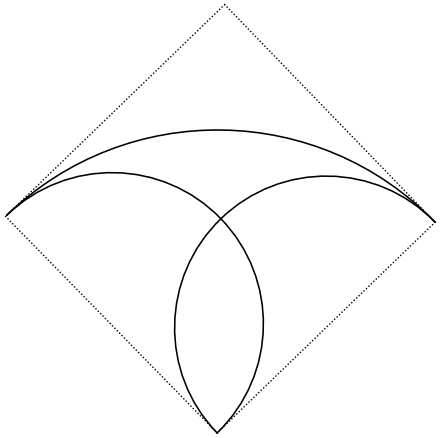


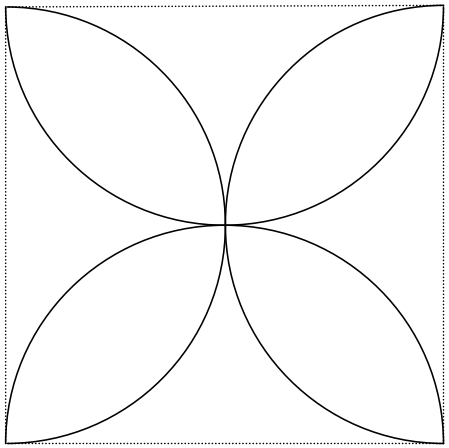


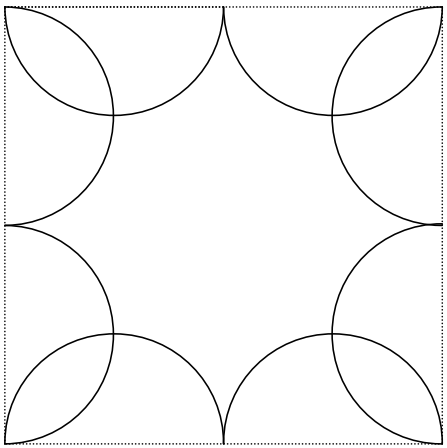


quels sont les éléments en commun de ces figures ?

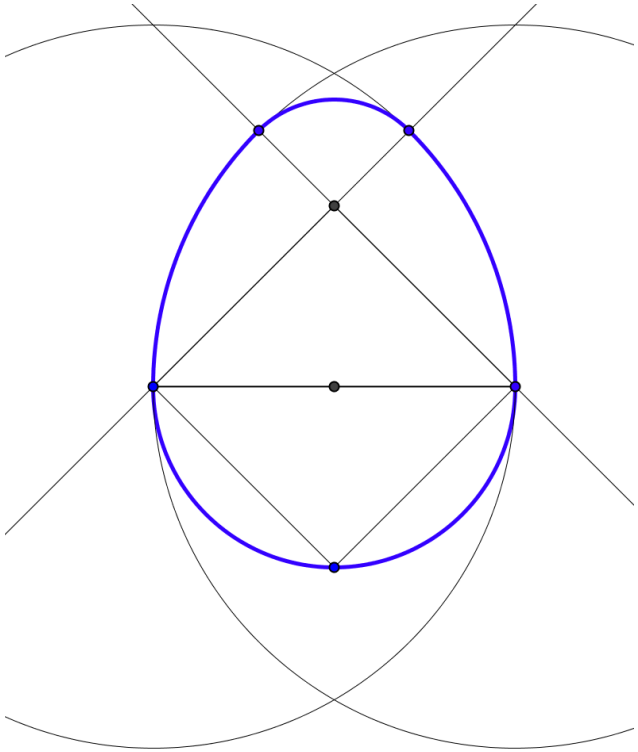








Décrire les étapes de construction d'une figure



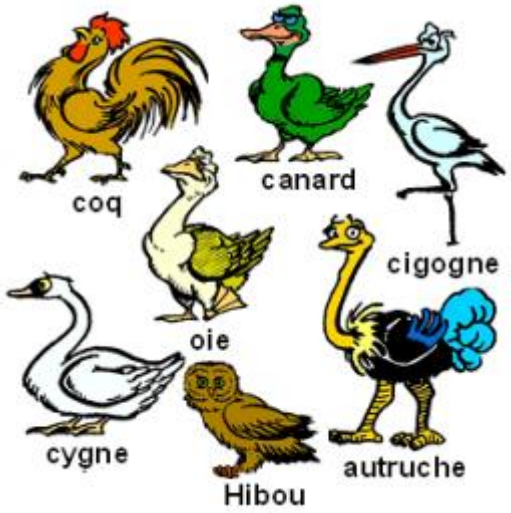
Cliquez sur la figure pour télécharger les étapes de la construction de l'œuf

LIRE

Activités de logique

lire… et comprendre !

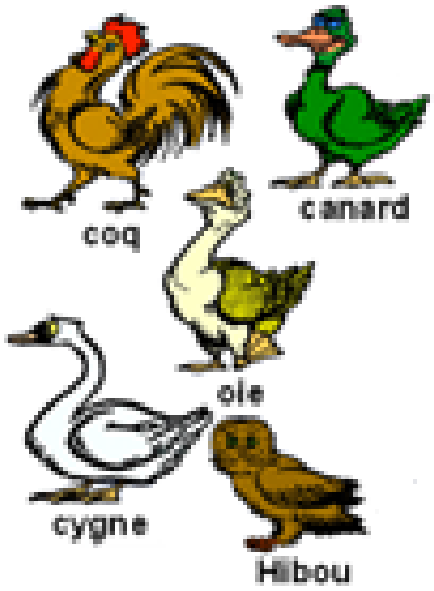
hep/ MAGNARD



Simon le dompteur fait marcher ses sept oiseaux bien en rang les uns derrières les autres.

Range les animaux dans l'ordre en lisant attentivement les renseignements :

Niveau 1

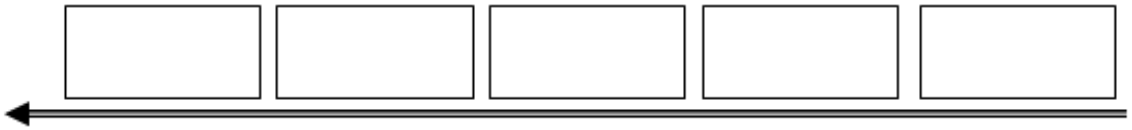


Le coq n'a personne derrière lui.

L'oie n'a personne devant elle.

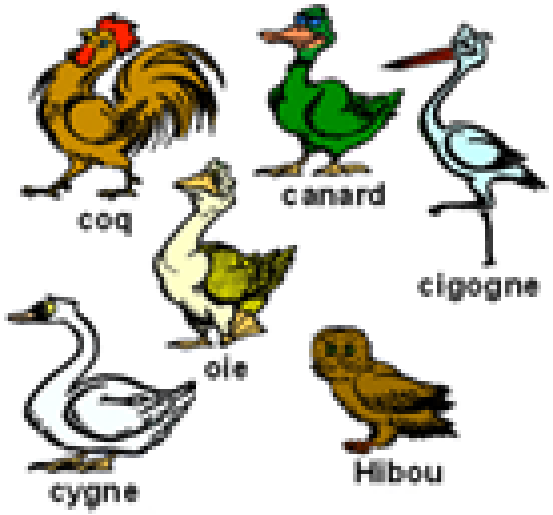
Le canard est entre le cygne et le hibou.

Le cygne n'est pas devant le hibou.



hep/ MAGNARD

Niveau 2



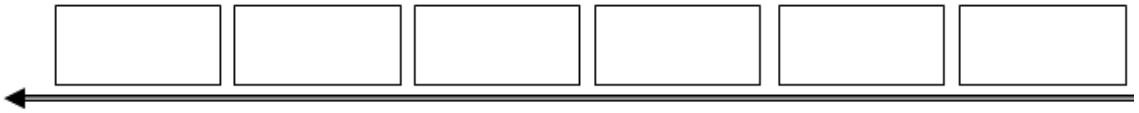
Le cygne suit le canard.

Le coq suit le cygne.

La cigogne est juste devant le canard.

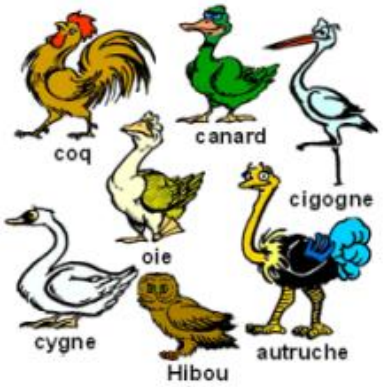
Le coq est avant dernier.

L'oie n'est pas première.



hep/ MAGNARD

Niveau 3



Le hibou n'est pas derrière le cygne.

L'autruche est suivie par 4 oiseaux.

L'oie est juste devant le coq.

Le canard n'a personne devant lui.

					cigogne	

hep/ MAGNARD

ÉCHANGER

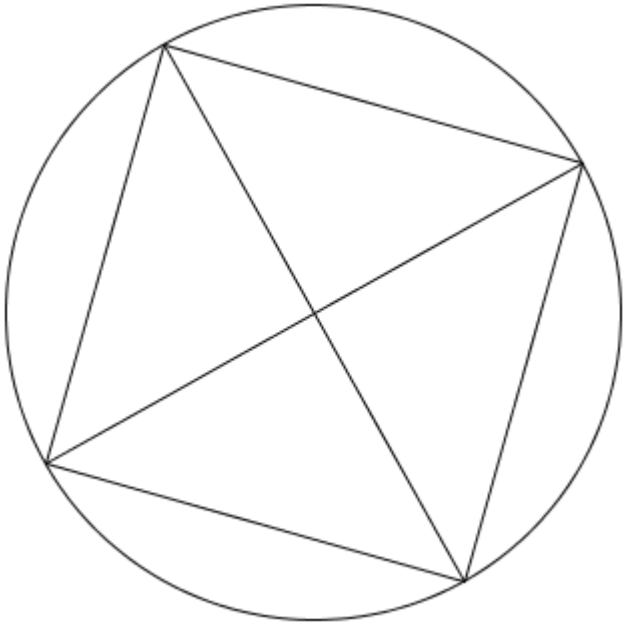
Situations de communication

stabiliser un peu de vocabulaire

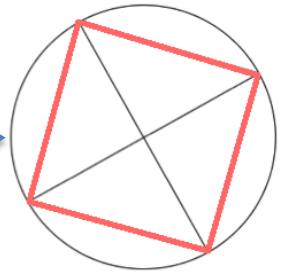
observation / description de la figure

mise en mémoire collective des mots utilisés

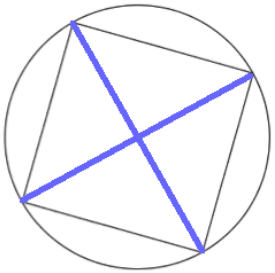
éventuellement construction d'un petit mémo illustré



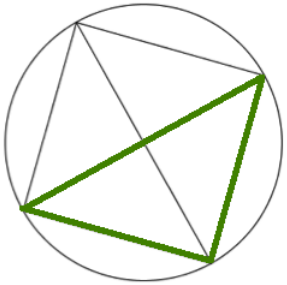
carré



perpendiculaires



triangle rectangle



situation de communication à l'oral

1. observation / description orale de la figure par un binôme "aveugle"
2. tracé de la figure par un autre binôme d'après les informations entendues
3. comparaison de la figure modèle et de la production réalisée

situation de communication à l'écrit

- Les élèves élaborent un message écrit qu'ils transmettent à leurs correspondants.
- Les récepteurs réalisent la production. En cas d'ambiguïté, ils peuvent poser une question aux émetteurs.
- Puis, émetteurs et récepteurs se réunissent pour débattre des différences et écrire un message définitif.

exemple 1

<u>objectif</u> : découvrir que ce sont les propriétés qui fondent les caractéristiques des polygones particuliers que sont le carré et le rectangle (et non pas leur forme).

propriétés travaillées : côtés isométriques (et/ou deux à deux), angle droit.

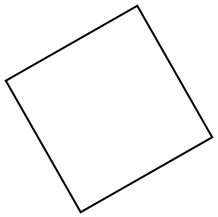
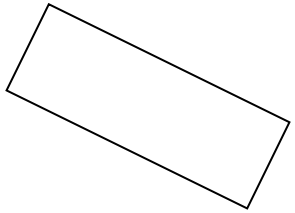
	

Fig. 1	Fig. 2

mots interdits pour les émetteurs : carré, rectangle

remarque : bien proposer les figures de façon inclinées afin d'éviter la position prototypique.

exemple 2

<u>objectif</u> : prendre conscience que l'orientation d'une figure ne change pas ses propriétés.

propriétés travaillées : côtés isométriques (et/ou deux à deux), angle droit, milieu d'un segment, éventuellement diagonales

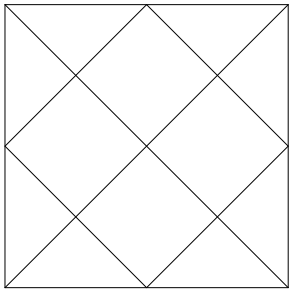
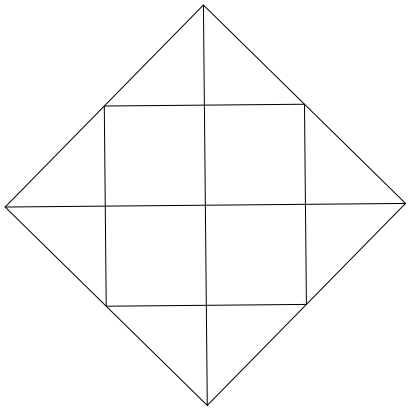
	

Fig. 1	Fig. 2

remarque : même figure, même dimension, mais orientation différente

exemple 3

objectif : découvrir des constructions de figure à partir d'un carré

propriétés travaillées : milieu d'un segment; arc de cercle, centre d'un cercle, éventuellement diamètre et rayon d'un cercle

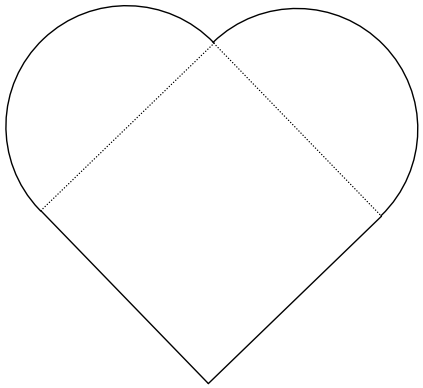


Fig. 1

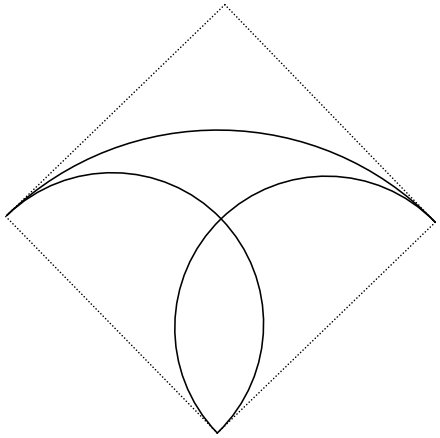


Fig. 2

remarque : même base carrée (visible ou non au choix)

ÉCRIRE

Un cahier de laboratoire

Deux sortes d’écrits possible

- des écrits personnels : instrumentaux, de et pour l’élève.
- des écrits collectifs : communicationnels, destinés à d’autres.

fonctions des écrits

personnel

Instrumentaux

- Agir
- Décharger la mémoire
- S’expliquer à soi-même

collectif

Communicationnels

- (se) Faire comprendre
- Expliquer aux autres
- Rechercher une validation

hep/ MAGNARD

Quatre parties pour structurer son cahier de laboratoire.

1. **Ce que l'on cherche.**
2. **Ce que l'on fait.**
3. **Ce que l'on découvre.**
4. **Ce que l'on a appris.**

Ce que l'on cherche.

Peut contenir la consigne ou l'énoncé de l'énigme (ou du problème) sous différentes formes : consigne simple, consigne avec ses reformulations, mise en forme du texte par sur-lignages, ajout de schémas explicatifs, illustrations par des dessins ou des images.

Ce que l'on fait.

Partie du cahier qui contient les écrits de recherche : brouillons, essais, erreurs, tentatives, hypothèses, photos des étapes de la recherche, liste du matériel utilisé.

Ce que l'on découvre.

Présentation des solutions : mise en forme, mise en relief, mise au point. Dans cette partie il s'agit en quelque sorte de prouver ses résultats : il faut être convaincant.

C'est l'occasion de réaliser une production d'écrits plus aboutie qui peut donc nécessiter plusieurs jets.

Ce que l'on a appris.

Institutionnalisation des savoirs travaillés dans la recherche et des connaissances acquises à l'issue du processus conduit dans le laboratoire.

Un langage conventionnel et correct.

DÉBATTRE

Expliquer, argumenter, prouver

Le choix d'un problème ouvert permet de fixer des objectifs d'apprentissage qui concernent l'utilisation du langage dans une recherche mathématique.

action – formulation – explication – argumentation - preuve

➔ langage en situation : **formulation**

➔ mise en commun collective : **argumentation**

Déroulement possible :

- découverte collective du questionnement
- temps de réflexion individuel, formulation de conjectures
- temps 1 de travail en groupes de recherche : confrontation des hypothèses, choix de protocoles expérimentaux
- séminaire 1 : présentation des hypothèses de chaque équipe
- temps 2 de travail en groupes de recherche : mise en œuvre des démarches, test des hypothèses
- séminaire n° 2 : présentation des premiers résultats

Dans un désert de 1000 km, il faut transporter 3000 bananes avec un chameau ne pouvant porter que 1000 bananes sur son dos.
En sachant qu'il consomme 1 banane par km parcouru.
Exemple: 100 km = 100 bananes consommées

Quel est le plus grand nombre de bananes que vous pouvez ramener au bout du désert ?

DE LA RÉCITATION À L'EXPRESSION

La maîtrise du langage en mathématique sert autant à comprendre le monde environnant qu'à inventer des mondes toujours plus étonnants, plus riches, plus beaux !

"Continuez à faire pétiller les cerveaux à travers les mathématiques, à susciter les intelligences des êtres et des choses en donnant aux élèves le goût de savoir et d'apprendre."

merci de votre attention

Thierry DIAS, HEP Lausanne

thierry.dias@hepl.ch

http://perso.orange.fr/dias.thierry/