Baccalauréat STL Biotechnologies
19 juin 2013 Antilles-Guyane

Exercice 1 **5 points**

Suite à un gros orage, la plage municipale de la commune d'Aistéhel subit une pollution momentanée du fait du débordement de la station d'épuration.

La concentration en bactéries E. coli (Escherichia coli) est retenue comme indicateur de contamination d'origine fécale.

Rappel (simplifié) des normes de qualité des eaux de baignade :

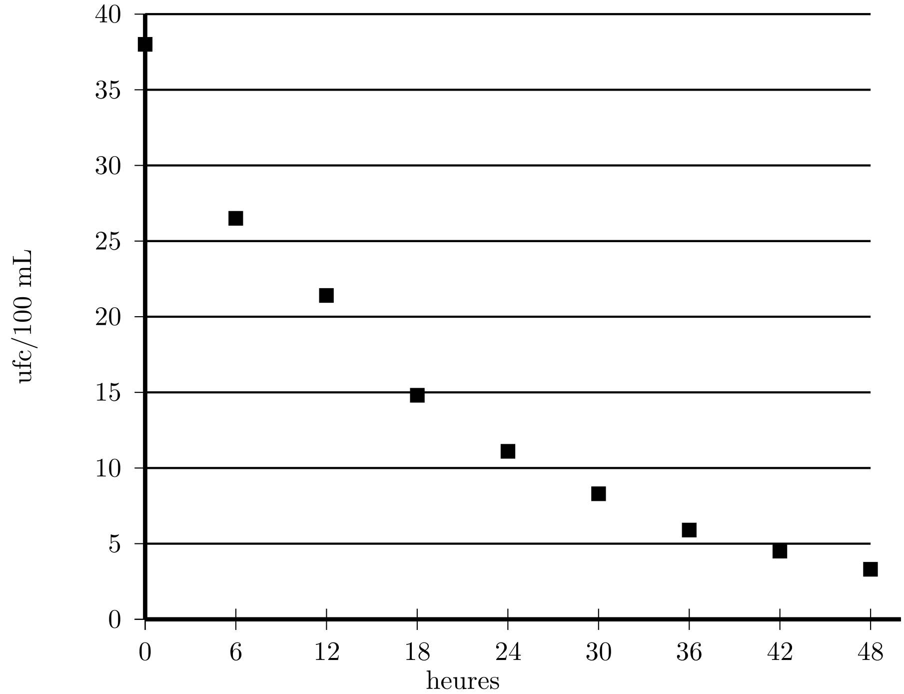
Qualité de l'eau	bonne	moyenne	mauvaise
Concentration en E. coli en ufc/100 mL(*)	0 à 100	100 à 2 000	supérieur à 2 000

(*) *ufc : unités formant colonies*

Des analyses sont faites toutes les six heures afin de suivre l'évolution de la concentration en E. coli.
Les mesures des deux premiers jours sont rassemblées dans le tableau ci-dessous.

Durée écoulée en heures (t_i)	0	6	12	18	24	30	36	42	48
Concentration en E. coli (y_i) (ufc/100 mL)	38 000	26 500	21 400	14 800	11 100	8 300	5 900	4 500	3 300

Ces mesures sont représentées graphiquement ci-dessous.



Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante

PARTIE A :

1) Indiquer pourquoi un ajustement affine ne paraît pas approprié.

2) On propose de réaliser un ajustement exponentiel. Pour cela, on pose $z_i = \ln(y_i)$ où y_i désigne la i-ème mesure de la concentration en E. coli.

a) Recopier sur votre feuille et compléter le tableau fourni en annexe 1 (arrondir les résultats à 10^{-3} près).

b) Á l'aide de la calculatrice, déterminer un ajustement affine de z en t selon la méthode des moindres carrés.
On donnera la réponse sous la forme $z = at + b$, en arrondissant les coefficients a et b à 10^{-3} près.

c) On considère désormais comme ajustement affine de z en t , la droite d'équation $z = -0,05t + 10,53$. En déduire un ajustement exponentiel de la concentration en E. coli de la forme $y(t) = C\mathrm{e}^{kt}$ (C et k étant deux constantes à déterminer à 10^{-2} près).

d) Pour cette question, on prendra $y(t) = 37\,400\mathrm{e}^{-0,05t}$.

- En supposant que le modèle reste valide au-delà des deux premiers jours, quelle concentration est attendue trois jours après le début des mesures ? (la valeur sera arrondie à 10^{-2} près).
- Au bout de combien d'heures après le début des mesures la concentration correspondra-t-elle à une eau de baignade de bonne qualité ?

PARTIE B :

On appelle (c_n) la concentration en E. coli au temps n (où n est le temps en heures).
Un technicien du laboratoire où sont réalisées les analyses propose de modéliser l'évolution de la concentration en E. coli par la suite géométrique (c_n) pour laquelle :

- $c_0 = 38\,000$
- la raison est $q = 0,947$.

Comparer ce second modèle au modèle proposé à la question 2. d. de la partie A.
Argumenter votre réponse.

Pour cette question, le candidat est invité à faire figurer sur sa copie toute trace de recherche, même incomplète ou infructueuse.

Exercice 2 **4 points**

PARTIE A : Résolution d'une équation différentielle

Les fonctions intervenant dans cette partie sont définies sur $\mathbb{R}$.
On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' + 0,5y = 12.$$

1) Déterminer une fonction constante solution de l'équation différentielle (E).

2) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

3) Déterminer la fonction c solution de l'équation différentielle (E) telle que $c(0) = 0$.

PARTIE B : Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = 24\left(1 - \mathrm{e}^{-0,5t}\right).$$

On appelle f' la dérivée de la fonction f.

1) Calculer $f'(t)$ et étudier son signe sur $[0\ ;\ +\infty[$.

2) En déduire les variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

3) Déterminer la limite en $+\infty$ de f ; que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?

4) Représenter cette fonction sur une feuille de papier millimétré à remettre avec la copie.
Unités graphiques : 1 cm en abscisse ; 0,5 cm en ordonnée

Exercice 3 **5 points**

La courbe (C) tracée à l'annexe 2 est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note f' la fonction dérivée de f.
On constate sur la représentation graphique que :

- La tangente (T) à la courbe (C) au point A$(0\,;\,3)$ passe par le point I$(1\,;\,5)$.
- La droite (D) d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

1) En utilisant les données précédentes et le graphique, préciser :

a) La valeur du nombre réel $f(0)$ et la valeur du nombre réel $f'(0)$ (justifier votre raisonnement).

b) La limite de la fonction f en $+\infty$.

2) On note (S) l'aire de la partie du plan située entre la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.
Préciser un encadrement de l'aire (S), en unités d'aire par deux entiers consécutifs.

3) On admet que la fonction f est définie, pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = (4x + 2)\mathrm{e}^{-x} + 1.$$

a) Montrer que pour tout nombre réel x : $f'(x) = (2 - 4x)\mathrm{e}^{-x}$.

b) Étudier le signe de f'. En déduire le sens de variation de f.

4) Soit F la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = (-4x - 6)\mathrm{e}^{-x} + x.$$

a) Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer la valeur exacte, puis la valeur approchée arrondie à 10^{-2} de l'aire (S), en unités d'aire.

c) Ce résultat est-il cohérent avec l'encadrement obtenu à la question 2 ?

Exercice 4 **6 points**

Une agence de voyages propose, dans un de ses circuits très fréquenté, une excursion sous forme d'option supplémentaire.

Le responsable de l'agence fait l'hypothèse que la proportion de clients prenant l'option est $0,25$.

On choisit au hasard un échantillon de 60 clients. Tous les clients ont la même chance d'être choisis.
On considère que le nombre de clients de l'agence est suffisamment grand pour assimiler le choix de cet échantillon à un tirage successif avec remise de 60 clients.

Les trois parties A, B, C peuvent être traitées de façon indépendante

PARTIE A : loi binomiale

On appelle X la variable qui, à tout échantillon de 60 clients, associe le nombre des clients qui ont pris l'option supplémentaire.

1) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n = 60$ et $p = 0,25$.

2) Á l'annexe 3, ont été reportées dans un tableau les valeurs approchées des probabilités $P(X = k)$, pour $6 \leqslant k \leqslant 25$ (sauf la valeur pour $k = 10$).
Les valeurs des probabilités $P(X = k)$ pour $k \geqslant 26$ et $0 \leqslant k \leqslant 5$ sont inférieures à 10^{-3} et elles seront considérées comme nulles.
On a également tracé l'histogramme de la variable aléatoire X.

a) Hachurer sur l'histogramme de l'annexe 3 à rendre avec la copie, l'aire correspondant à la probabilité $P(X \leqslant 21)$.

b) En utilisant le tableau de valeurs de l'annexe 3, ou par toute autre méthode, déterminer une valeur approchée de $P(X \leqslant 21)$, en détaillant la démarche utilisée (arrondir le résultat à 10^{-2}).

PARTIE B : approximation par une loi normale

On suppose que les conditions permettant d'approximer une loi binomiale par une loi normale sont remplies.
On appelle Y une variable aléatoire suivant la loi normale de moyenne μ et d'écart type σ et approximant la loi binomiale $\mathcal{B}(60\ ;\ 0,25)$ (de paramètres $n = 60$ et $p = 0,25$).

1) Déterminer les paramètres μ et σ (valeurs arrondies à 10^{-3} près). Justifier votre réponse.

2) On considère désormais que $\mu = 15$ et $\sigma = 3,35$.

a) Déterminer, sans utiliser la calculatrice, $P(15 \leqslant Y \leqslant 18,35)$ (valeur arrondie à 10^{-3} près). Justifier votre raisonnement.

b) Sans utiliser la calculatrice, justifier que $P(15 \leqslant Y \leqslant 25,05)$ a pour valeur approchée 0,498 5.

c) Sachant que $P(21 \leqslant Y \leqslant 25,05)$ a pour valeur approchée 0,035 29, déduire des questions précédentes une valeur approchée de $P(Y \leqslant 21)$.

d) Le résultat précédent est-il cohérent avec le résultat de la question A 2. b) ?

PARTIE C : prise de décision

1) Déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des clients ayant pris l'option dans un échantillon de 60 clients. On note J cet intervalle.

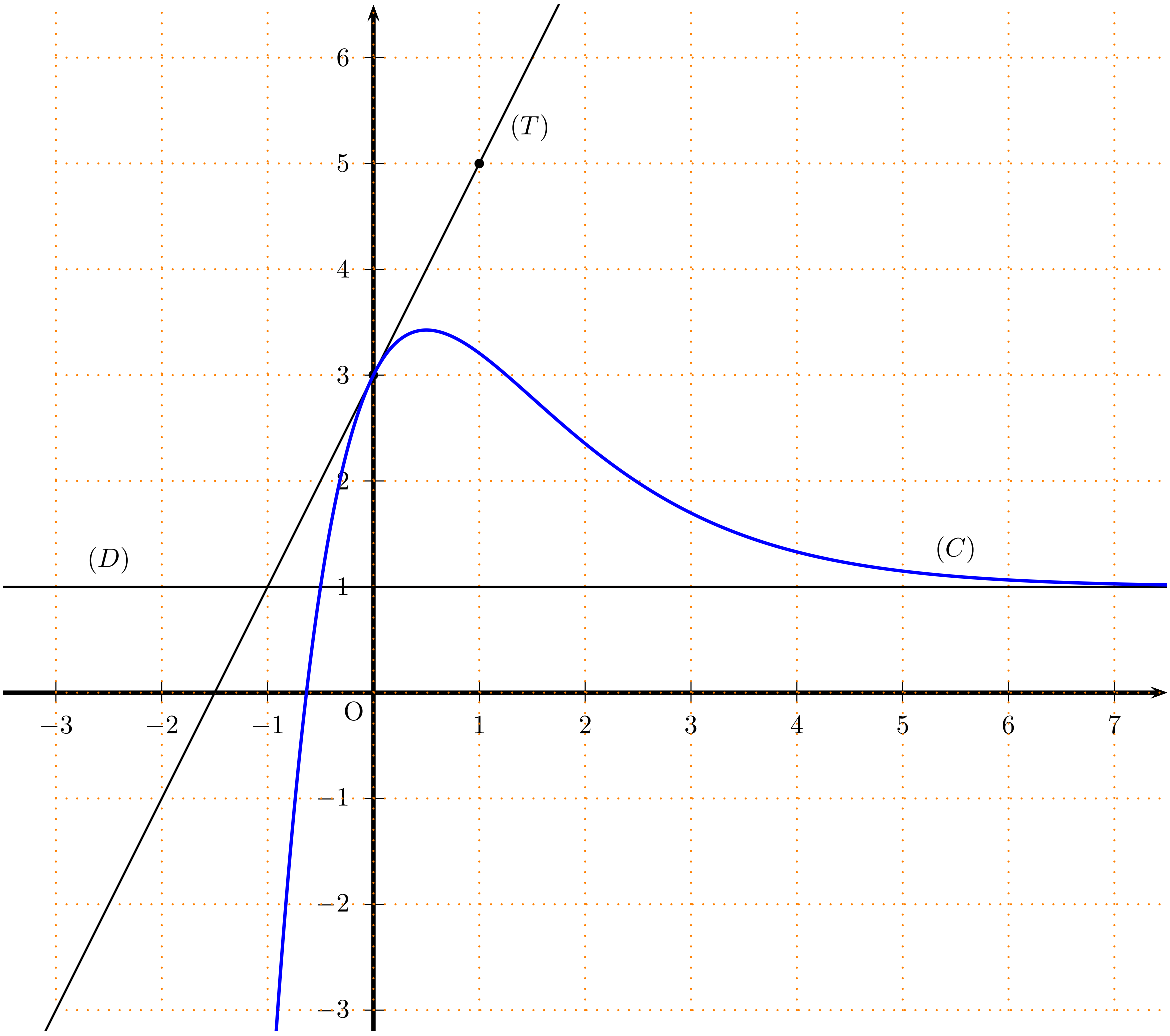
2) Pour vérifier l'hypothèse que la proportion de clients prenant l'option est $0,25$, au niveau de confiance 95 %, l'adjoint du responsable de l'agence choisit au hasard un échantillon de 60 clients. Il observe alors qu'un tiers des clients a pris cette option.

En utilisant l'intervalle J précédent, l'adjoint du responsable de l'agence décide de rejeter l'hypothèse, au niveau de confiance 95 %. Êtes-vous d'accord ? Justifier votre réponse.

ANNEXE 1 : Á RECOPIER SUR VOTRE FEULLE ET Á COMPLÉTER (EXERCICE 1)
Cette annexe n'est pas à rendre

t_i (en heures)	0	6	12	18	24	30	36	42	48
$z_i = \ln(y_i)$ (à 10^{-3} près)									

ANNEXE 2
(EXERCICE 3)
Cette annexe n'est pas à rendre



ANNEXE 3 Á RENDRE AVEC LA COPIE (EXERCICE 4)

Histogramme de la loi binomiale $\mathcal{B}(60\ ;\ 0,25)$(de paramètres $n = 60$ et $p = 0,25$)

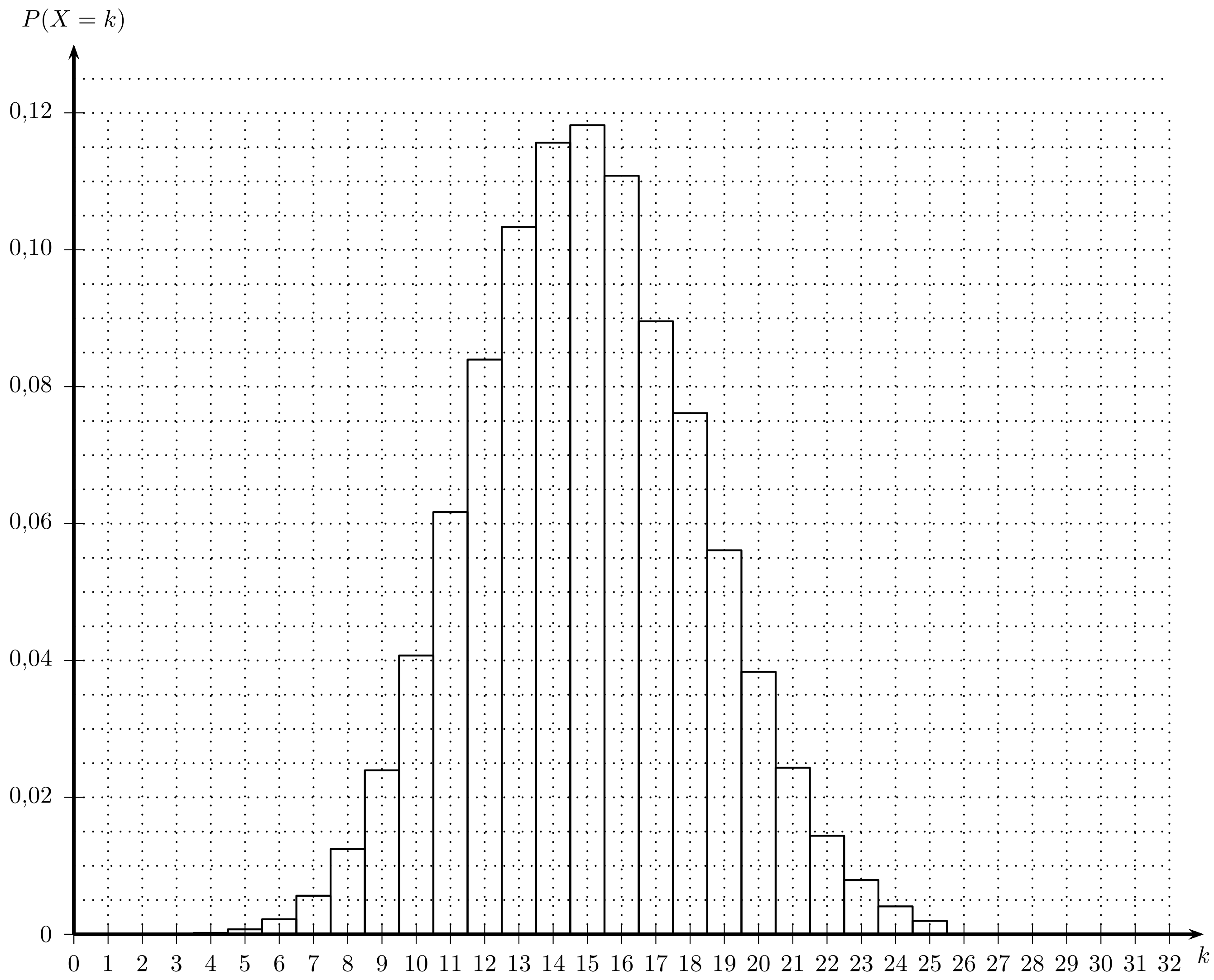


Table des valeurs de la loi binomiale $\mathcal{B}(60\ ;\ 0,25)$ pour $6 \leqslant k \leqslant 25$ (sauf la valeur pour $k = 10$

k	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$P(X = k)$	0,002 2	0,005 6	0,012 4	0,024 0	...	0,061 7	0,084 0	0,103 4	0,115 7	0,118 2

k	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$P(X = k)$	0,110 8	0,095 6	0,076 1	0,056 1	0,038 3	0,024 3	0,014 4	0,007 9	0,004 1	0,002 0