La fonction cube

Activité 1

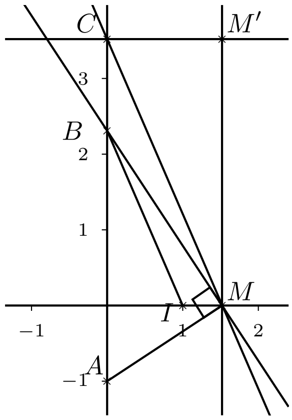
Soit un repère orthonormé de centre O. Soit A le point de coordonnées $(0\ ;\ -1)$.
Soit I le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$. Soit M le point de coordonnées$(x\ ;\ 0)$ où x est un nombre réel.
Soit B le point d'intersection de l'axe des ordonnées et de la perpendiculaire en M au segment [AM].
On a démontré dans la séquence sur la fonction carré que $OB = x^2$.

1) En utilisant le logiciel « Géogébra »

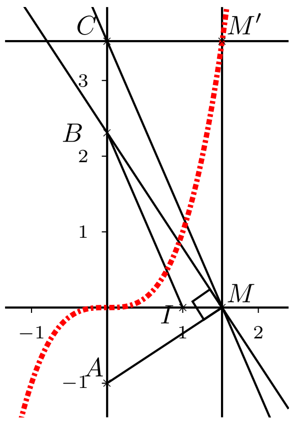
a) Construire C le point d'intersection de l'axe des ordonnées et de la droite parallèle à (BI) passant par M.

b) Quelles sont les coordonnées du point C ?

c) Construire M' le point d'intersection de la perpendiculaire en M à l'axe des abscisses et de la perpendiculaire en C à l'axe des ordonnées.



d) Construire le lieu géométrique de M' lorsque M décrit l'axe des ordonnées.



2) Observez la courbe ainsi obtenue et qui a donc pour équation $y = x^3$.

a) Que peut-on conjecturer sur la parité de f ? Justifier.

b) Vérifier que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

c) Démontrer que si $0 < x < x'$ alors $x^3 < x'^3$

d) Déduire du a) et du c) le tableau de variations de f.

e) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4
$f(x)$					

f) Pour quelles valeurs de x a-t-on $x^3 > 10^3$?

g) Pour quelles valeurs de x a-t-on $x^3 > 10^9$?

Auteurs : Christian CYRILLE (Lycée Schoelcher) et Patrick JEAN-BAPTISTE(Lycée Schoelcher)

Activité 2

1) On voudrait comparer les positions relatives des courbes d'équation $y = x^3$ et $y = x^2$.

- **a)** Résoudre l'équation d'inconnue x réelle : $x^2 = x^3$
- **b)** Résoudre les inéquations d'inconnue x réelle : $x^2 > x^3$ et $x^2 < x^3$

2) En utilisant la question précédente et le 5°) de l'activité 2 de la séquence sur la fonction carré, déterminer les positions relatives des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$.

3) Compléter le tableau suivant :

x	0	$0,5$	1	$1,5$	2	3
$f(x)$						

4) Placer les points de coordonnée $(x\ ;\ x^3)$ du tableau précédent dans un repère orthogonal.

5) Relier ces points à main levée.
En déduire le tracé complet de la courbe d'équation $y = x^3$.
Tracer dans le même repère les courbes d'équation $y = x$ et $y = x^2$.

Résumé de cours

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$
Elle admet le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variations de f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

Sa courbe représentative admet O comme centre de symétrie.
Deux nombres sont rangés dans le même ordre que leurs cubes.
Si $x = 0$ ou $x = 1$ alors $x = x^2 = x^3$.
Si $x > 1$ alors $x < x^2 < x^3$.
Si $0 < x < 1$ alors $x > x^2 > x^3$.

Auteurs : Christian CYRILLE (Lycée Schoelcher) et Patrick JEAN-BAPTISTE(Lycée Schoelcher)