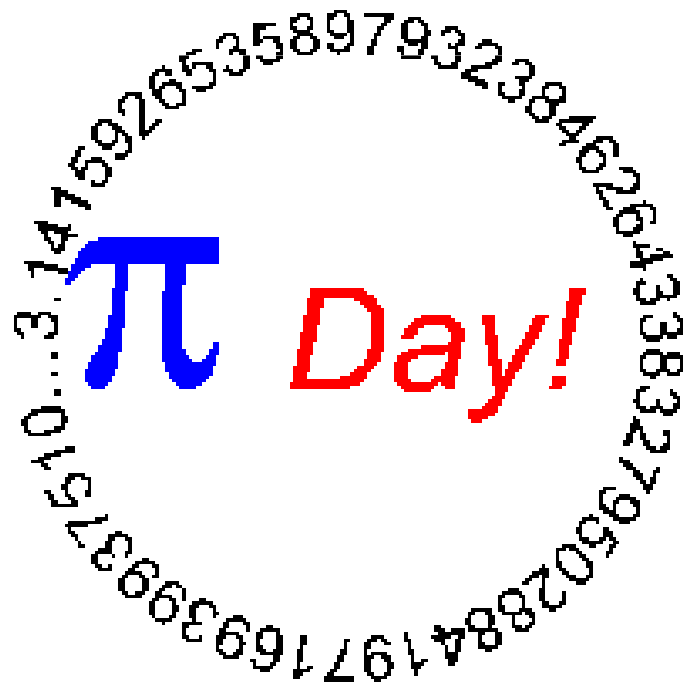


Une histoire de π



Jean-François CULUS
ESPE Martinique

Plan

- Ce que vous savez de π
- π au temps de la géométrie
- π au temps de l'analyse
- π au temps des machines

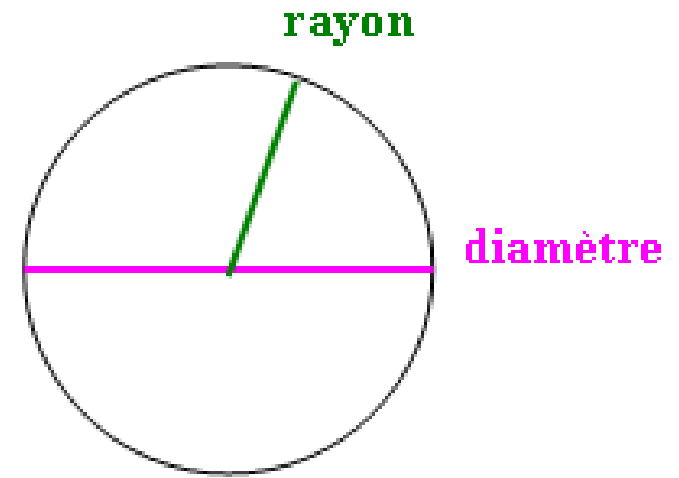
$\frac{355}{113}$	$\frac{3927}{1250}$	$\frac{377}{120}$
$\frac{333}{106}$	$\frac{223}{71}$	$\frac{22}{7}$

Pi Day

March 14

Jean-Paul Delahaye: Le fascinant nombre Pi

Ce que vous savez de π



- $\pi = 3,1415\dots$

- Périmètre du cercle de rayon R (diamètre D):

$$\text{Périmètre} = 2 \pi R = \pi D$$

- Aire du disque de rayon R (diamètre D)

$$\text{Aire} = \pi R^2 = \pi \frac{D^2}{4}$$

Une (très brève) histoire des mathématiques

- Temps de la géométrie (Antiquité)
- Temps de l'analyse (Lumières)
- Temps de l'informatique (Contemporaine)

ULTIMATE
 π DAY
3.14.159:26:53



π au temps de la géométrie

- -4 000 : Babylone
- - 1 650: Egypte
- - 550: Bible
- - 500: Grèce (Anaxagore)
- - 300 : Grèce (Euclide)
- - 250: Grèce (Archimède)



- 4 000: Babylone

◁|| = 12

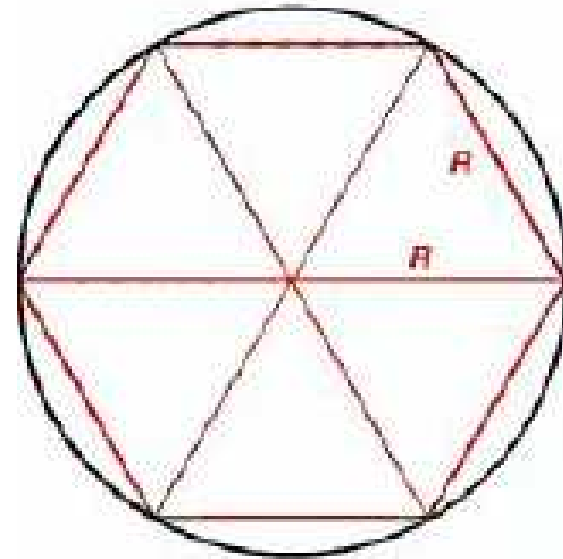
||| = 62

◁||||| = 25



-4 000 Babylone

- **Première approximation:**
Périmètre du cercle = $2 \pi R$
Périmètre de l'hexagone = $6 R$
 $\pi \cong 3$



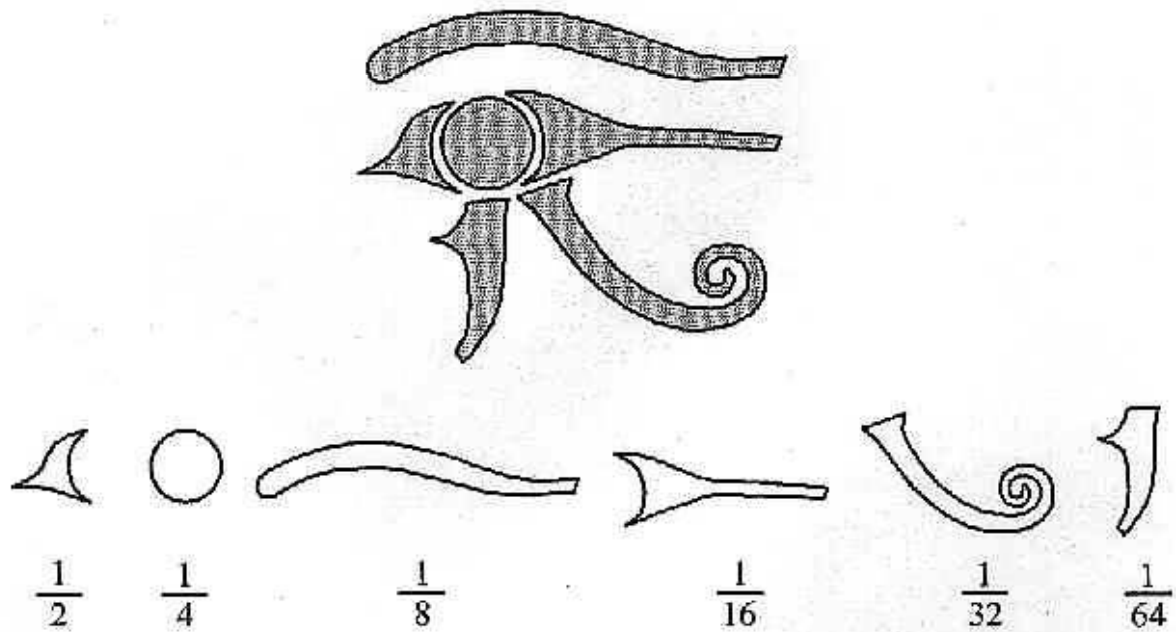
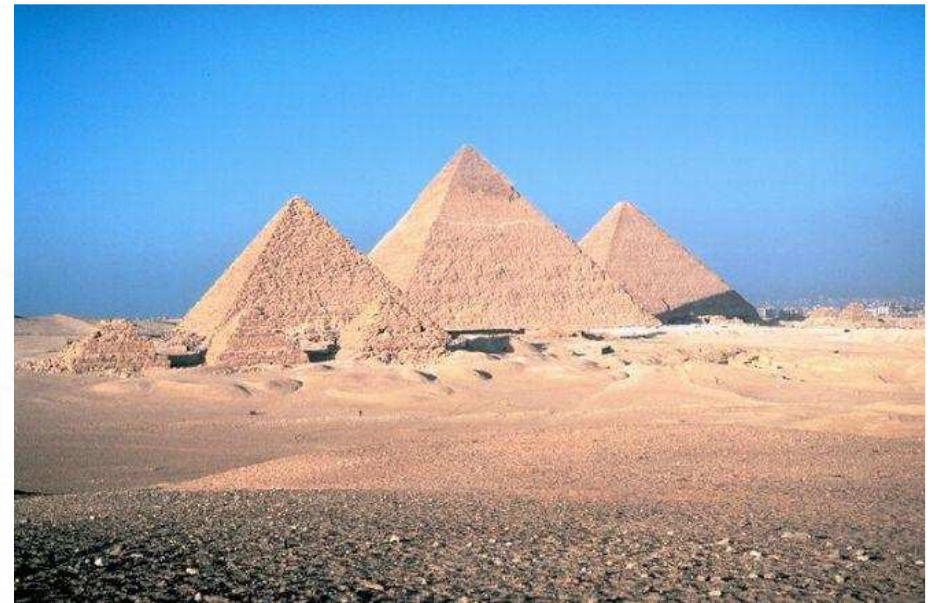
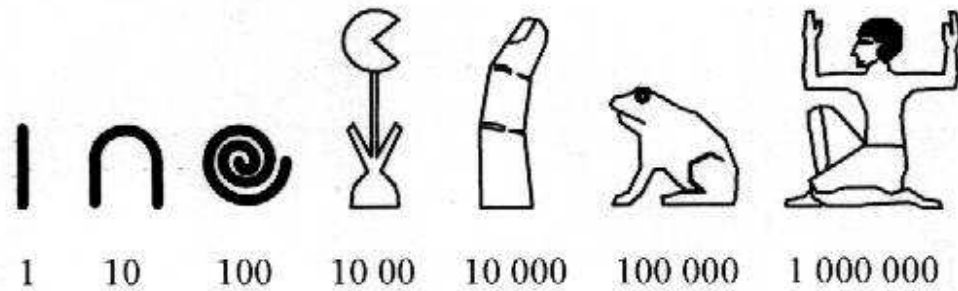
-4 000 Babylone

- Seconde valeur approchée:

$$\pi \cong 3 + 1/8 = 3,125$$

[illegible]

-1 650: Egypte



-1 650: Egypte

Papyrus Rhind

*L'aire du cercle de
diamètre 9
coudées est celle
du carré de côté 8
coudées*



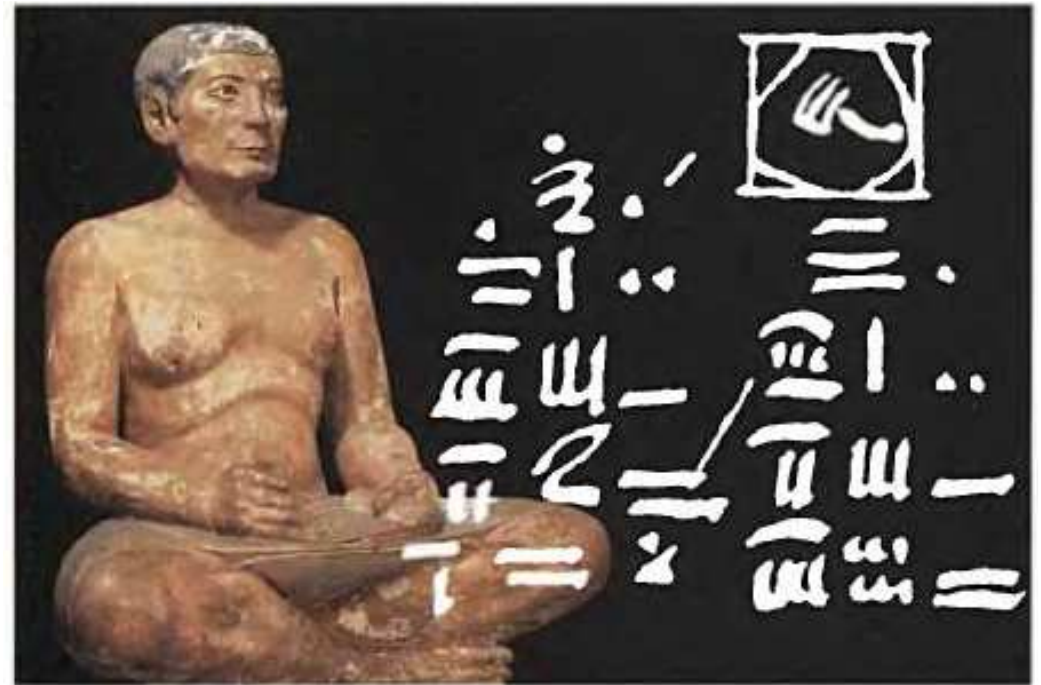
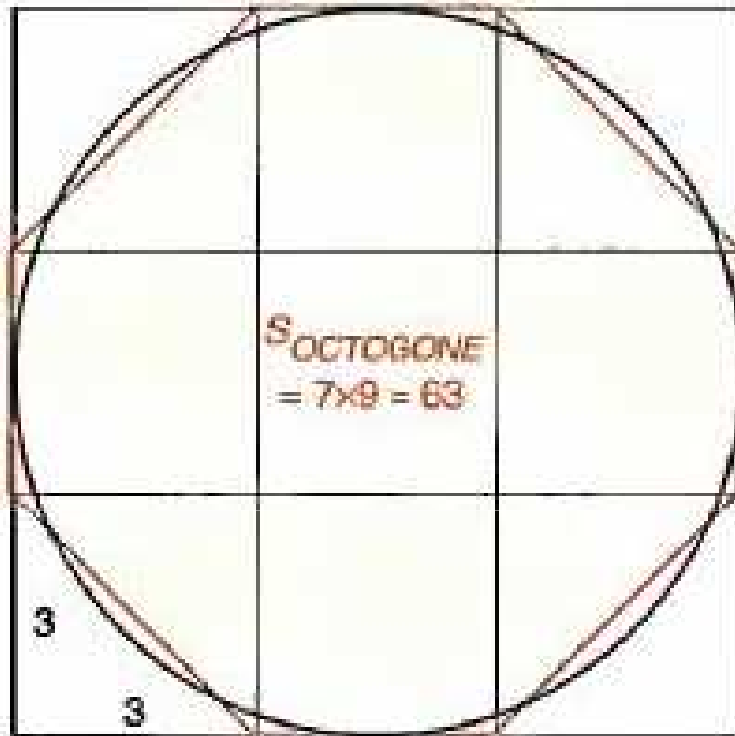
Aire Cercle: $\pi (9/2)^2$

Aire carré: 8^2

$$\pi (9/2)^2 = 8^2$$

$$\pi = 8^2 \times 2^2 / 9^2 = (16/9)^2 \\ = 3, 16049...$$

-1 650: Egypte



Approximation de l'aire du
cercle par celle d'un octogone

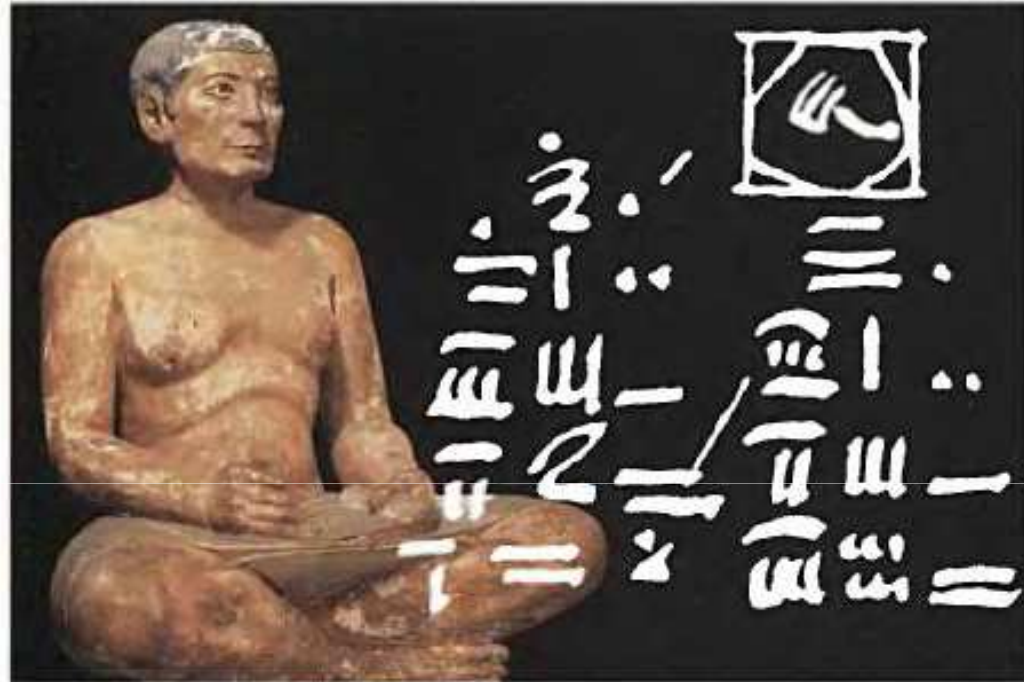
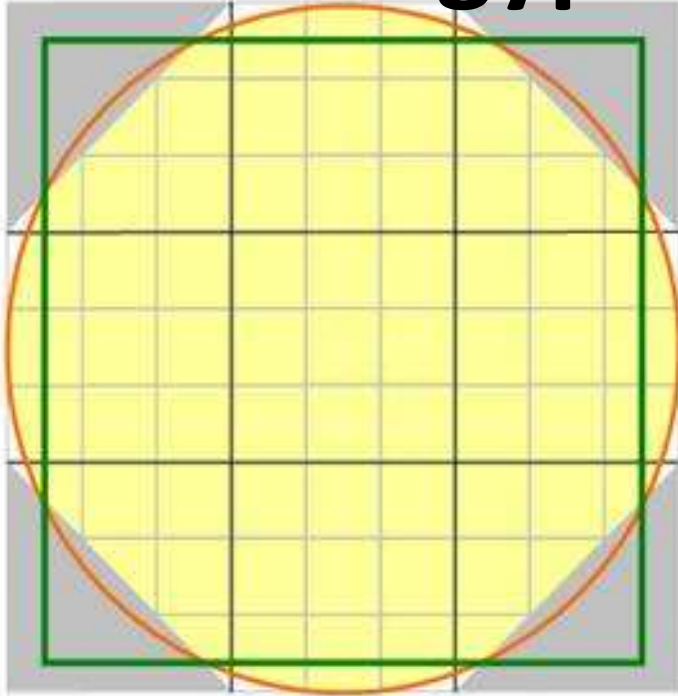
Nombre de carrés: 9

Aire de l'octogone: 7 carrés $\rightarrow 7 \times 9 = 63$

Rapport Aire / Rayon² = $(7 \times 9) / (9/2)^2 = (7 \times 4) / 9$

$\pi \cong 3,1111 \dots$

-1 650: Egypte



- Obtient la règle de diminution du neuvième:
 $\pi \cong (16 / 9)^2 = 3,16049....$
Ecart: $\Delta = 0,089..$ (0,6%)

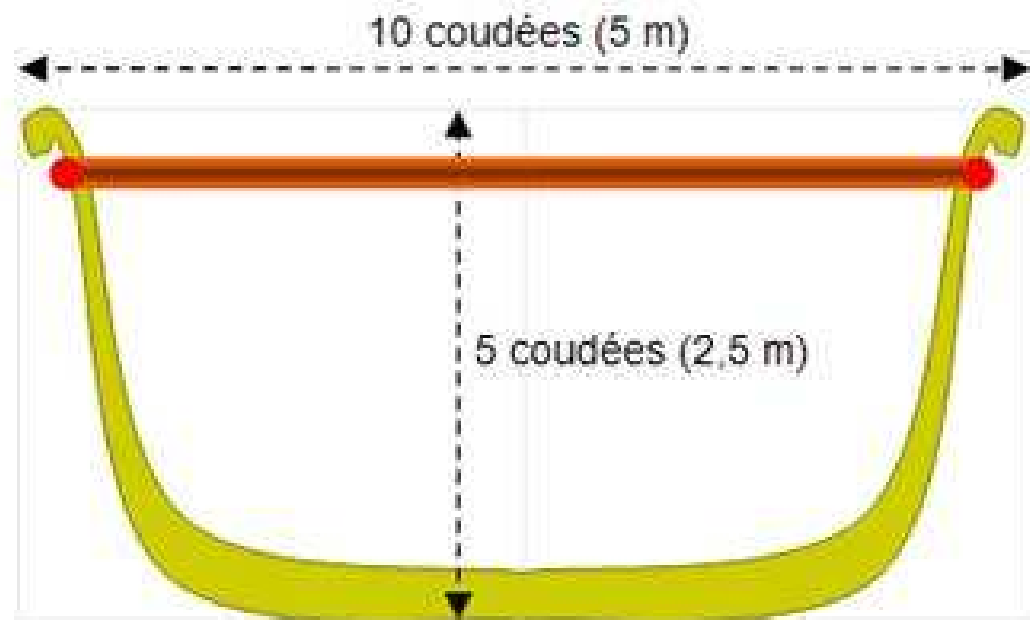
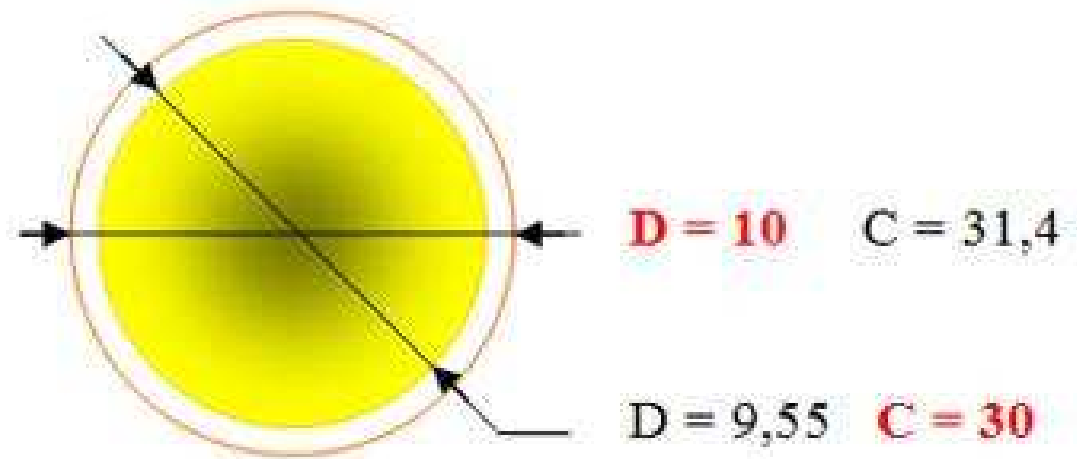
-550 : Bible

Il fit aussi une mer de fonte de dix coudées d'un bord jusqu'à l'autre, qui était toute ronde: elle avait cinq coudées de haut et était environnée tout à l'entour d'un cordon de trente coudées.

Livre des Rois



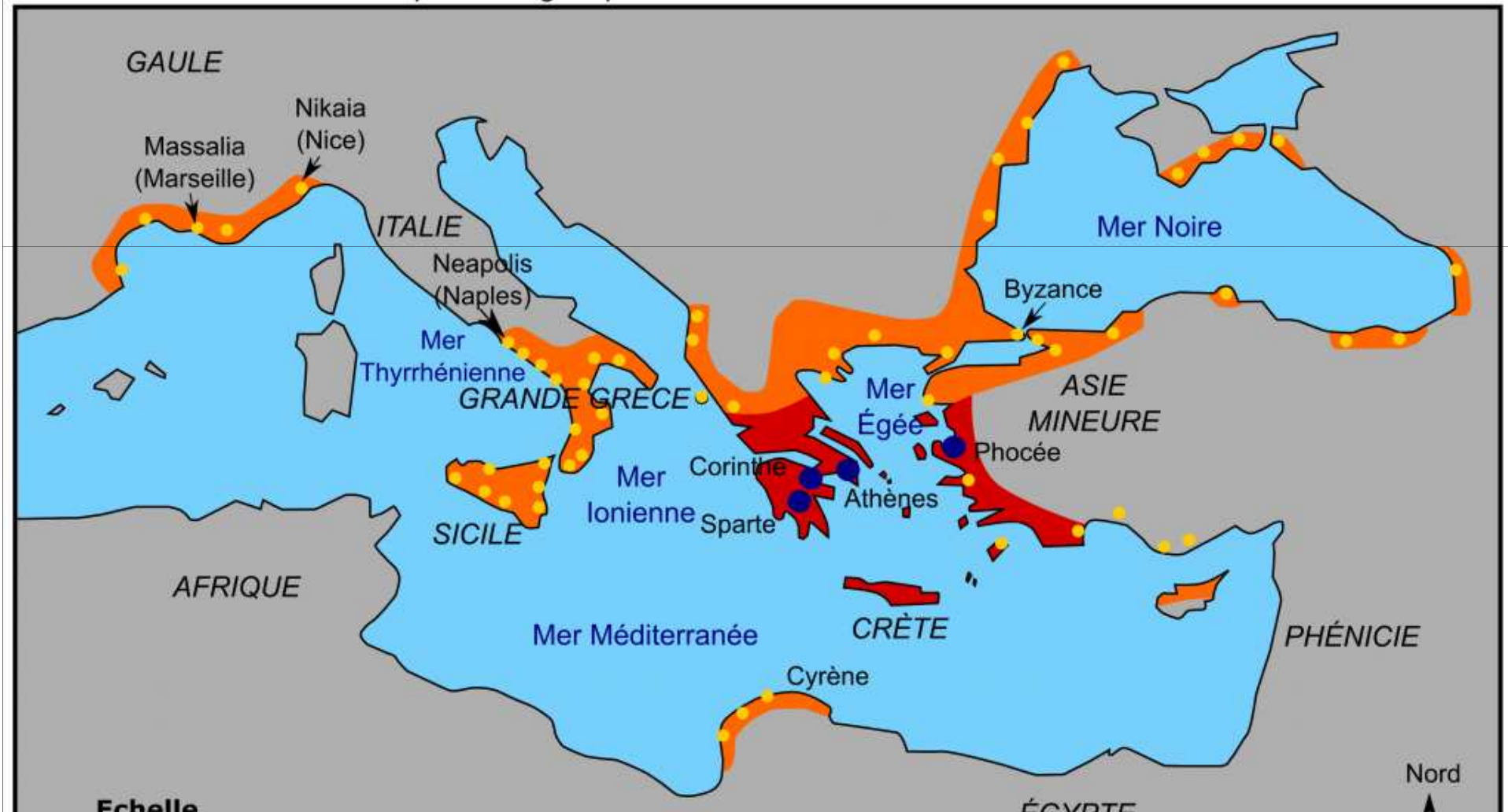
- 550: Bible



-500: Grèce



La présence grecque en Méditerranée entre 800 et 500 av. J-C



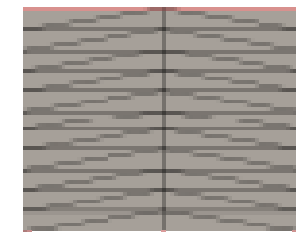
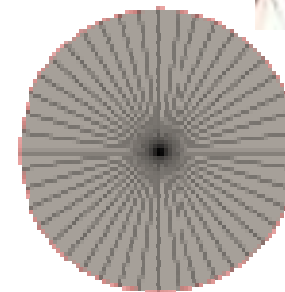
-430: Grèce: Anaxagore

Quadrature du cercle:

A l'aide uniquement de la règle et du compas, dessiner un carré de même aire qu'un cercle donné.

Revient à construire $\sqrt{\pi}$

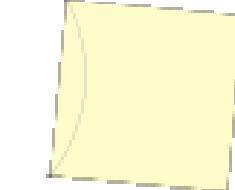
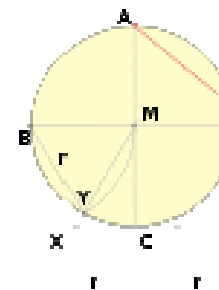
Pierre-Laurent Wantzel (1837)



$b = 1$

$d = 1$

$a = 1$



-300: Euclide

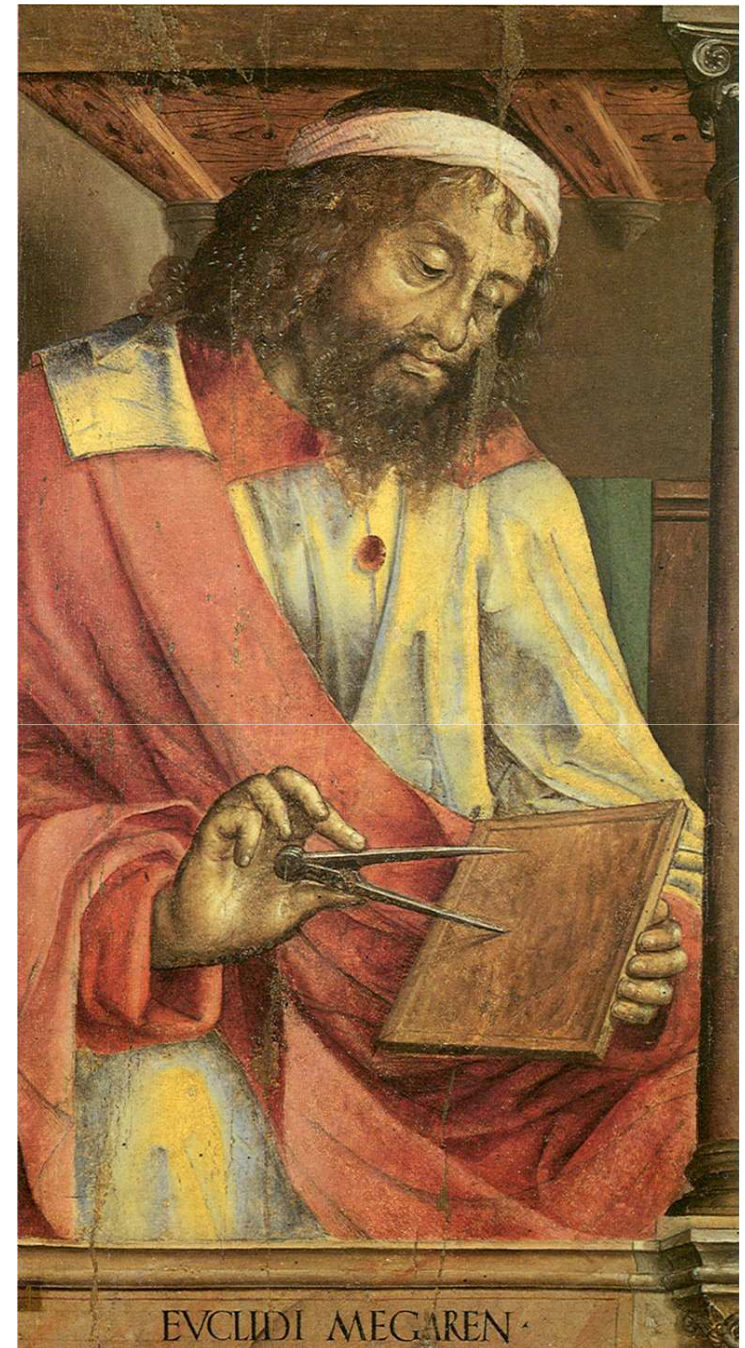
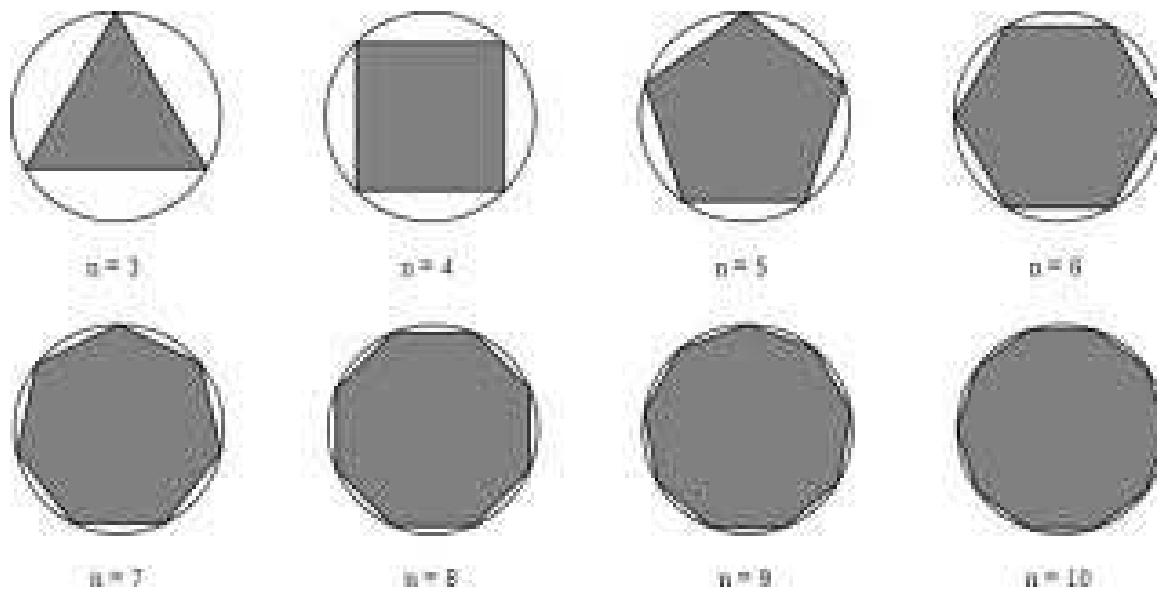
- Antiphon (- 430)
- Eudoxe de Cnide (-400)
- Euclide (-300)

en considérant un polygone avec un grand nombre de côtés, on peut « rendre la différence entre l'aire à calculer et l'aire des polygones qu'on construit plus petite que toute quantité positive pré-assignée, aussi petite soit-elle »



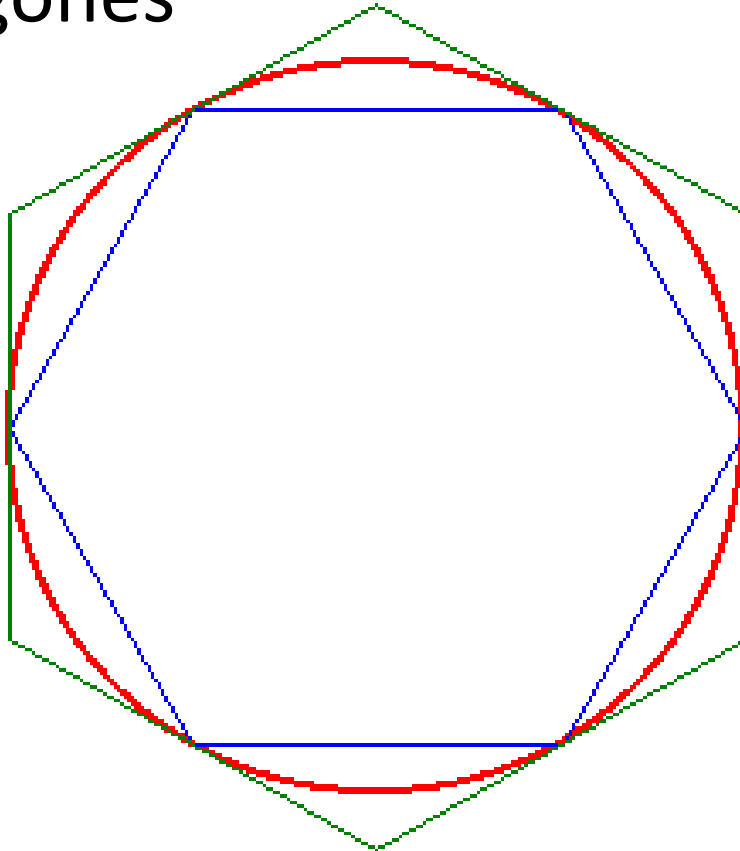
-300: Euclide

en considérant un polygone avec un grand nombre de côtés, on peut “rendre la différence entre l’aire à calculer et l’aire des polygones qu’on construit plus petite que toute quantité positive pré-assignée, aussi petite soit-elle”

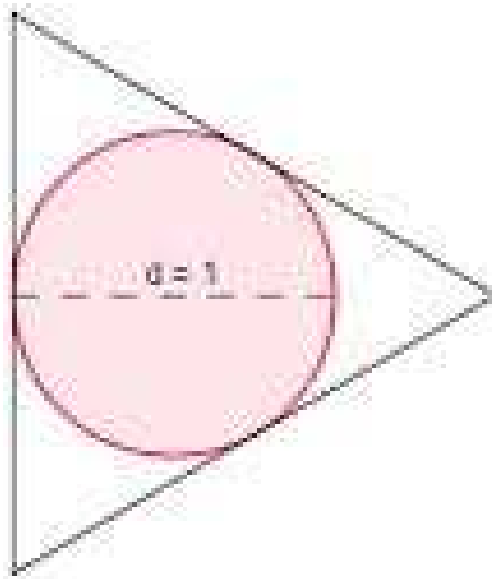


-200: Archimède

- Encadrement de l'aire du disque par celles de deux polygones



-200: Archimède



$$n=3$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{3} < r < 3\sqrt{3}$$



$$n=6$$

$$3 < r < 2\sqrt{3}$$



$$n=12$$

$$\sqrt{6}(3-\sqrt{3}) < r < 12(2-\sqrt{3})$$

-200: Archimède

- Méthode d'Archimède
- Polygones à 96 côtés

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70} = \frac{22}{7}$$

- $3,1408 < \pi < 3,1428$
- Valeur moyenne: 3,1419 (à 0,03%)



Entre le temps de la géométrie et celui de l'analyse (-200 à 1650)

- De -200 à 1450



•

•



De 1450 à 1610

Entre le temps de la géométrie et celui de l'analyse (-200 à 1450)



Ptolémée (100-170):

$$3+8/60+30/60^2= 3,141666$$

- Fibonacci (1180-1250)

$$\pi = 3,141818$$

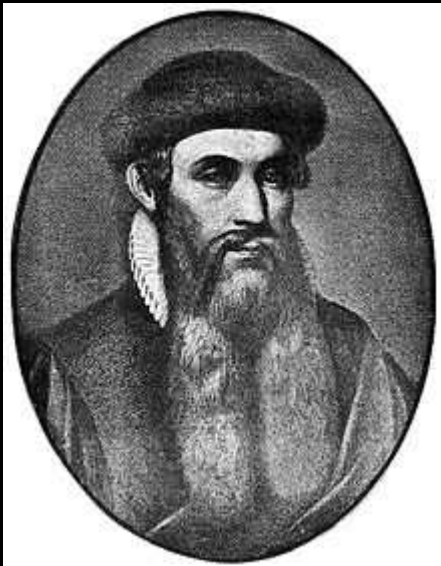


Entre le temps de la géométrie et celui de l'analyse (autour de 1500)



La Renaissance

- 1450 - 1650



Gutenberg (1400-1468)



De Vinci (1452-1519)



Christophe Colomb (1492)



Henri IV (1589-1610)

Entre le temps de la géométrie et celui de l'analyse (autour de 1500)

- Valentinus Otho (1573)

$$355/113 = 3,141592992$$

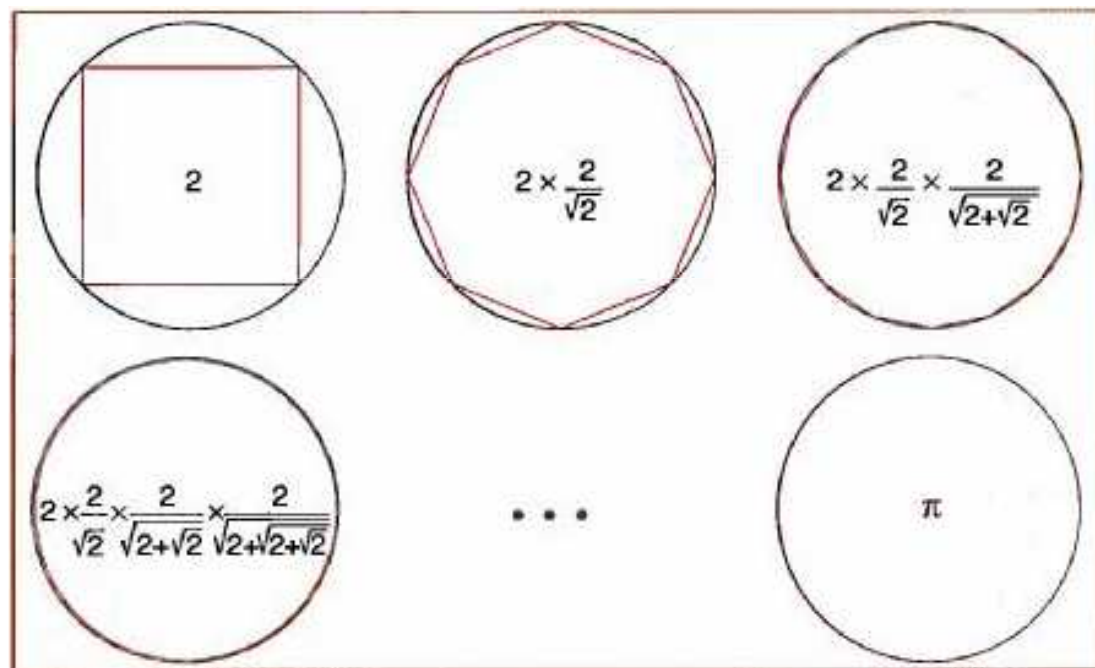
- Romanus (1593) 15 décimales de π par un polygone régulier à 2^{30} côtés.
- Rudolph Von Keulen (1596) 20 décimales de π par un polygone régulier à 60×2^{33} côtés.
(1609) 34 décimales.

Entre le temps de la géométrie et celui de l'analyse

- François Viète (1540-1603)



francois Viète



$$\pi = 2 \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \times \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}} \times \dots$$

Entre le temps de la géométrie et celui de l'analyse

- René Descartes (1596-1650)

Méthode des isopérimètres: on construit une suite de polygones à 2^3 , 2^4 , 2^5 ... côtés ayant tous même périmètre.



π au temps de l'analyse (1650 - ...)



Spinoza
(1632-1677)



Locke
(1632-1704)



Royal Society
(1660)

π au temps de l'analyse (1650 - ...)



1687 - 1684
Principia

Newton
(1643-1727)



Leibniz
(1646-1716)

π au temps de l'analyse

John Wallis (1616-1703)



$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots = \frac{\pi}{2}$$

π au temps de l'analyse

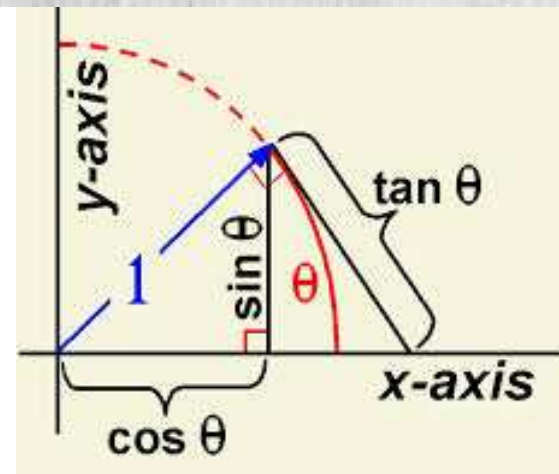
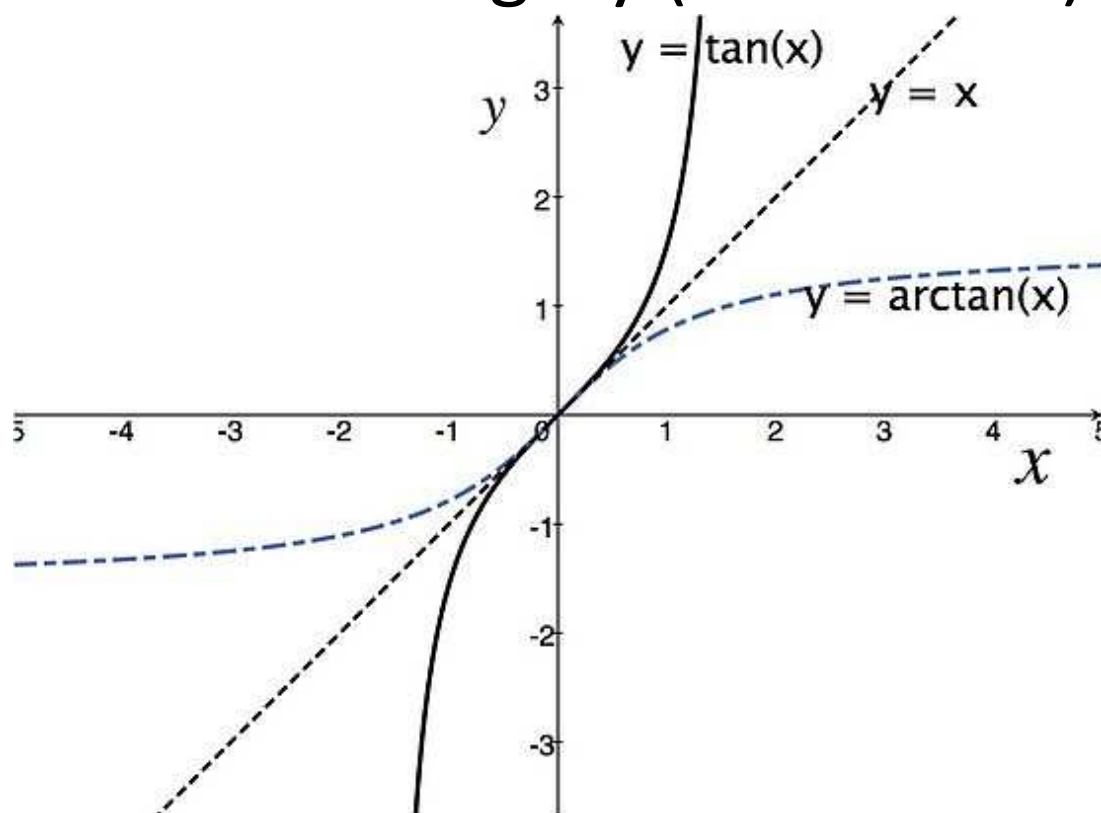
William Brouncker (1620-1684)



$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2 + \frac{3^2}{2 + \frac{5^2}{2 + \frac{7^2}{2 + \frac{9^2}{2 + \frac{11^2}{2 + \dots}}}}}}.$$

π au temps de l'analyse

- James Gregory (1638-1675)



$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots$$

π au temps de l'analyse

- James Gregory (1638-1675)



$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots$$

$$\pi = 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} = 4 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots \right].$$

Inde: Madhava (1410)

π au temps de l'analyse

- Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{9 \times 11} + \dots$$

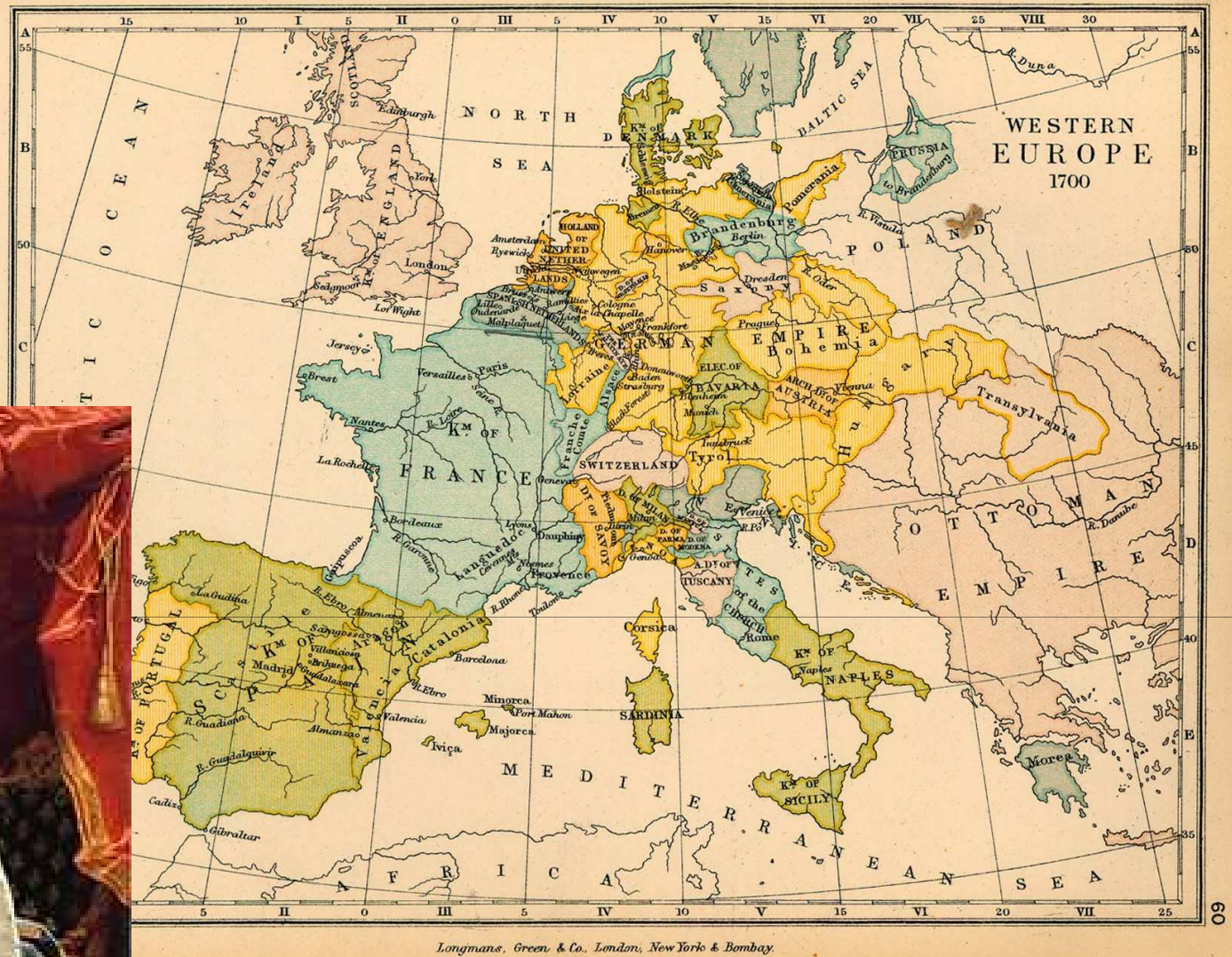


G W Leibniz

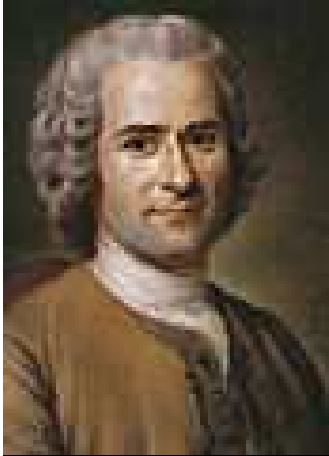
1700



1700



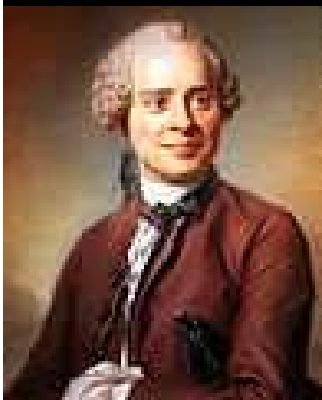
Siècle des Lumières 1715-1789



Rousseau



Diderot



D'Alembert

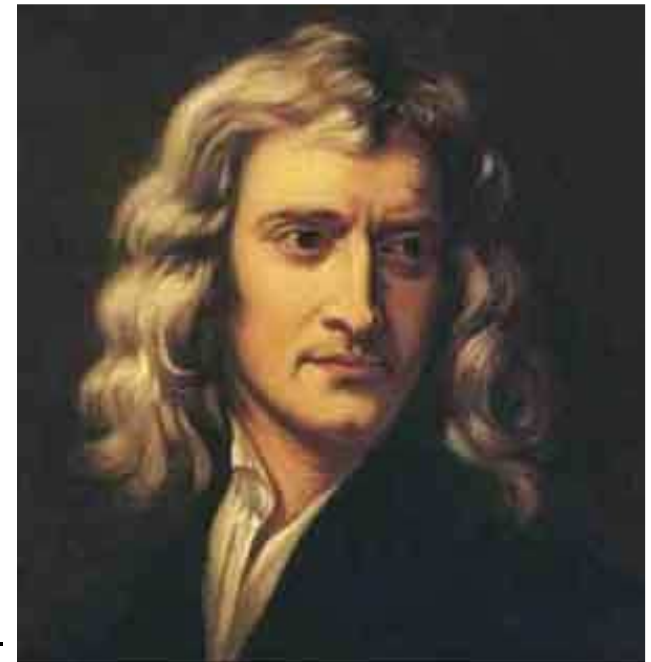


Voltaire



π au temps de l'analyse

- Isaac Newton (1642-1727)



$$\frac{d\text{Arcsin}(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{or pour } -1 < x < 1$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + a(a-1)\frac{x^2}{2} + \dots + a(a-1)\dots(a-n+1)\frac{x^n}{n!} + \dots \quad \text{donc}$$

$$\frac{d\text{Arcsin}(x)}{dx} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)(-1)^k \frac{(x^2)^k}{k!}$$

$$\pi = 6 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{4k+1} (k!)^2 (2k+1)}$$

π au temps de l'analyse

- John Machin (1680-1752)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

$$\operatorname{Arctan}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 +$$

L'erreur est divisée par 25 à chaque étape



π au temps de l'analyse

- Léonhard Euler
(1707-1783)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$



Leonh. Euler

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$



secundis sit porro altitudo quaesita ad quam corpus ascendit x . Scribatur pro numero cujus logarithmus est unitas, e , qui est 2,7182817... cujus logarithmus secundum Vlacq. est 0,4342944. Indicat porro N numerum

Quoniam mihi quidem alia adhuc via non patet istud praestandi, nisi per imaginaria procedendo, formulam $\sqrt{-1}$ littera i in posterum designabo, ita ut sit $ii = -1$, ideoque $\frac{i}{i} = -i$.

Ponamus ergo Radium Circuli seu Sinum totum esse $= 1$, atque satis liquet Peripheriam hujus Circuli in numeris rationalibus exacte exprimi non posse, per approximationes autem inventa est Semicircumferentia hujus Circuli esse $= 3,1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679821480865132723066470938446 +$, pro quo numero, brevitatis ergo, scribam π , ita ut sit $\pi =$ Semicircumferentiae Circuli, cujus Radius $= 1$, seu π erit longitudo Arcus 180 graduum.



π au temps de l'analyse

- Jean Henri Lambert (1728-1777)
 π est irrationnel
- Adrien Marie Legendre (1752-1833)
 π^2 est irrationnel



Entre le temps de l'analyse et celui des machines (1789-1945)

- 1840: Révolution industrielle



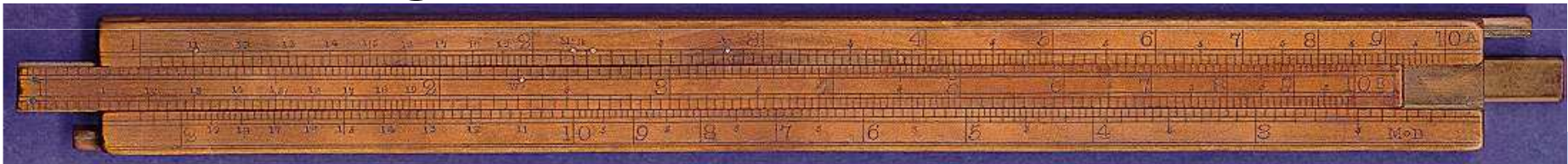
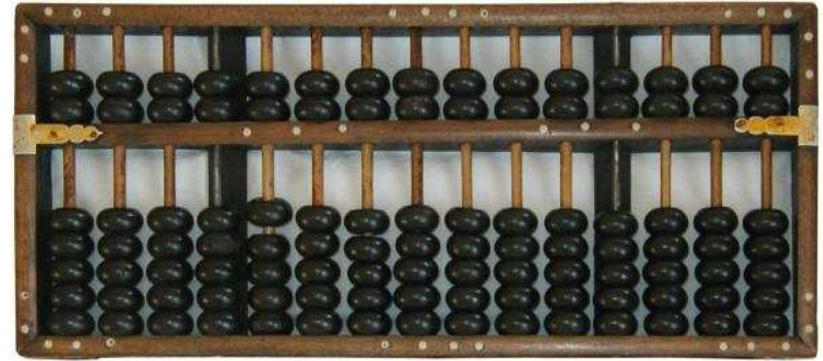
Entre analyse et machines

- 1794: Georg von Vega 140
(Arctan)
- 1844: von Strassnitzky 200
(calculateur prodige)
- 1847: Clausen: 248
- 1854: Rutgerford: 440
- 1874: Shanks: 707



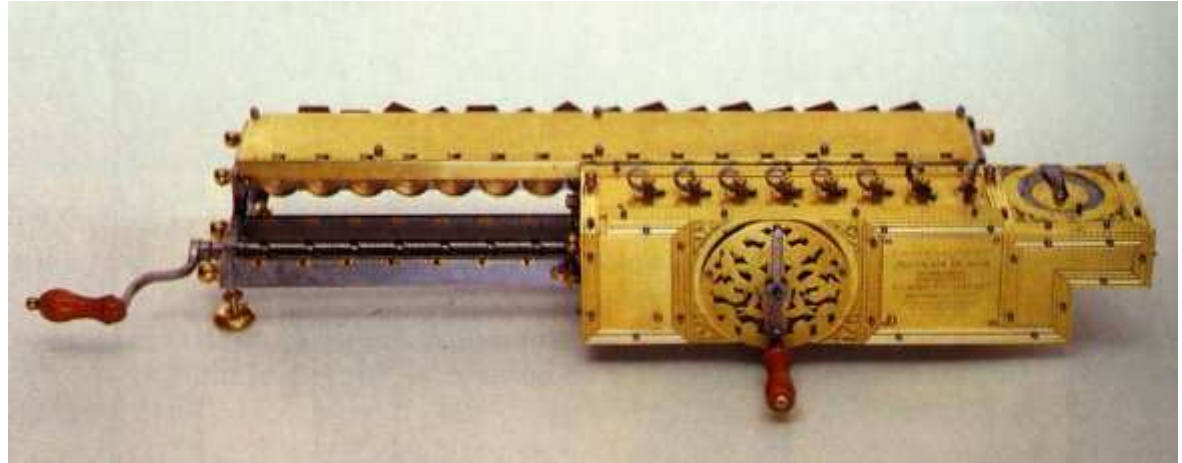
Evolution des machines à calculer

- -500: Boulier chinois
- 1632 Règle à calculer
- 1642 Pascal



Evolution des machines à calculer

- 1679 Leibnitz



- 1822 Thomas de Colmar



- 1875: mécanique



- Fergusson (1947)
710 décimales



Photo A. Devaux

π au temps des machines

1949:

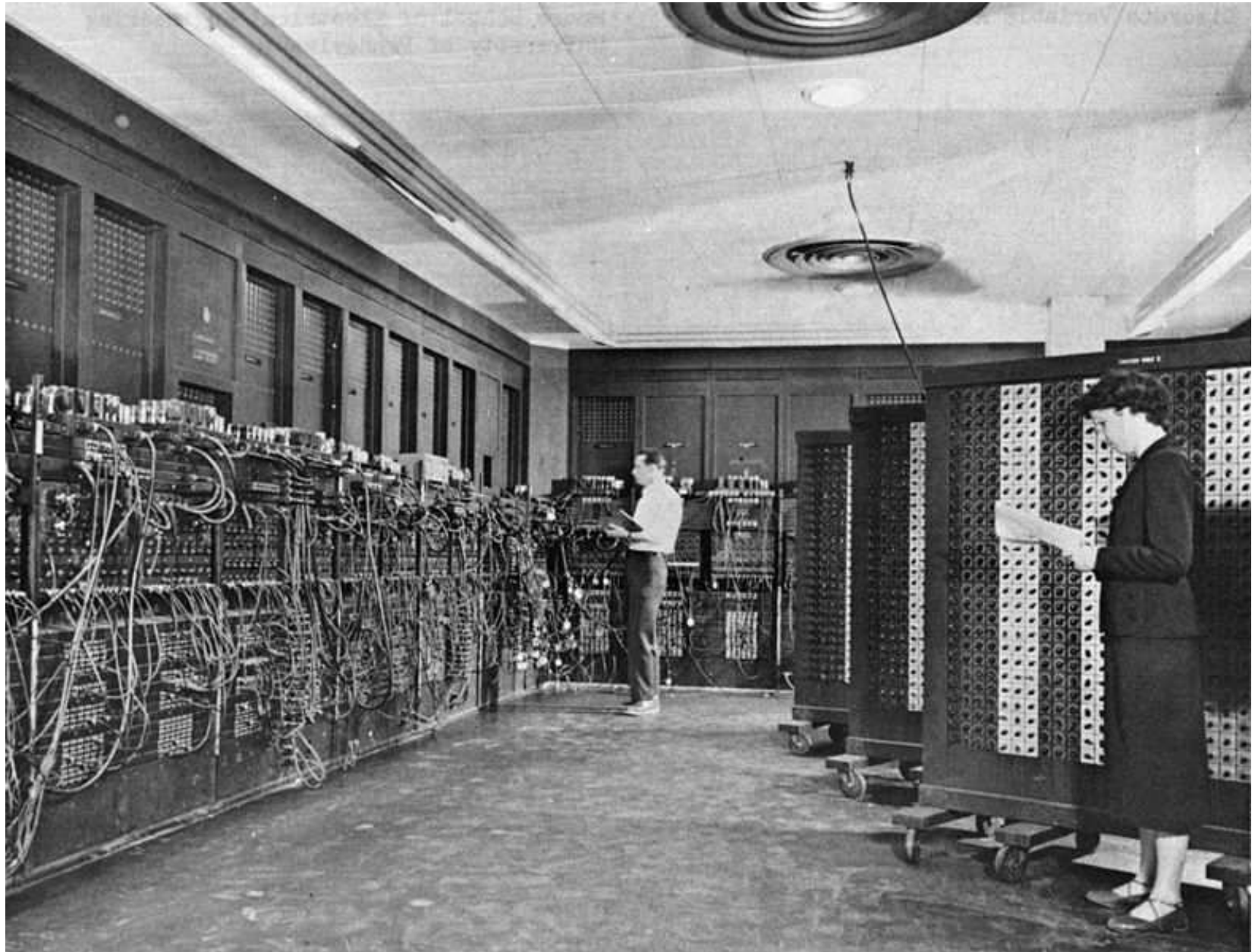
ENIAC

2 037

70h

30t

70m²



ENIAC

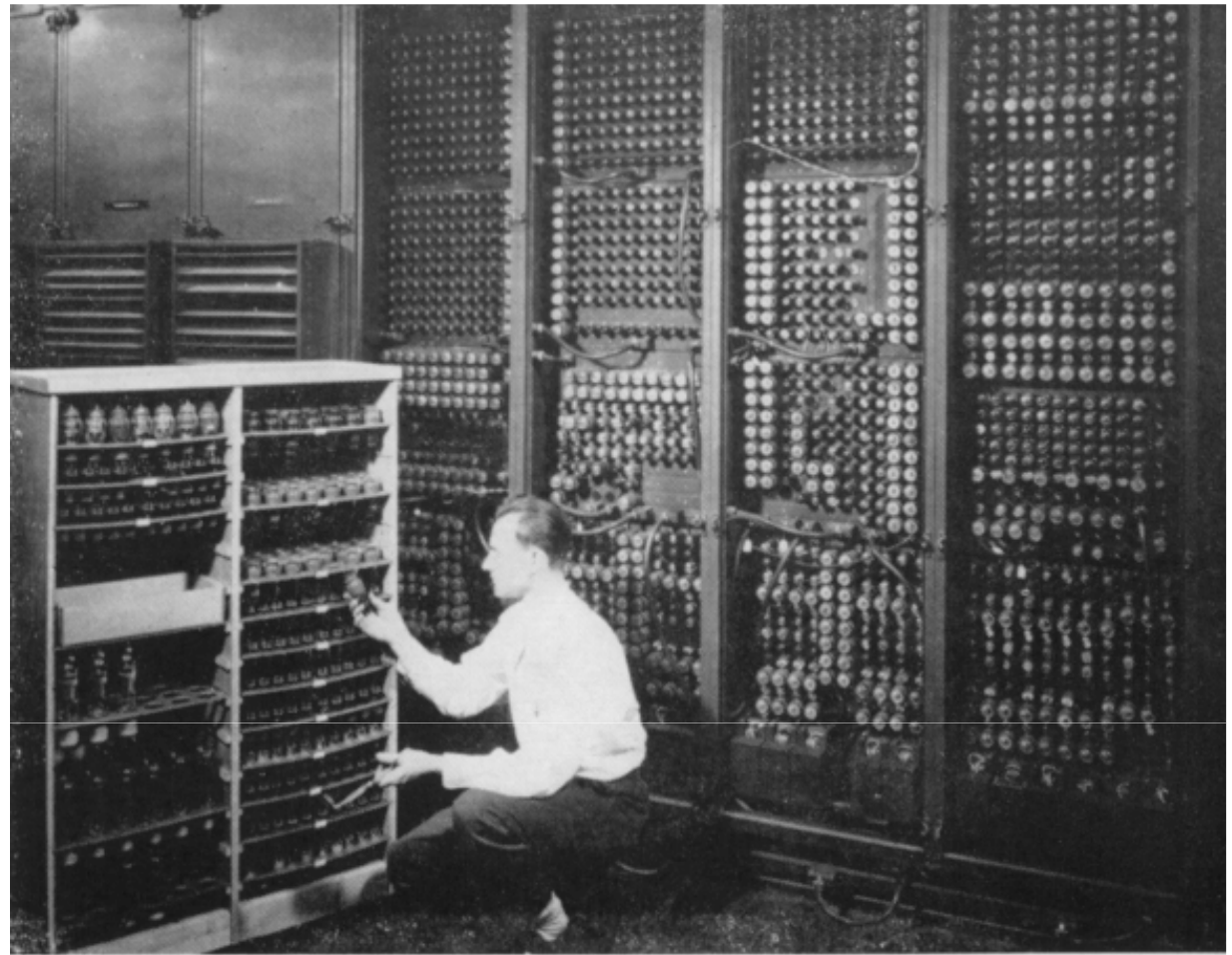
7 247h

3 491 production

1 061 problèmes

196 inactif

2 044 interventions



Replacing a bad tube meant checking am

Multiplication de nombres à 10 chiffres

Main 5 min

Calculateur 15 sec

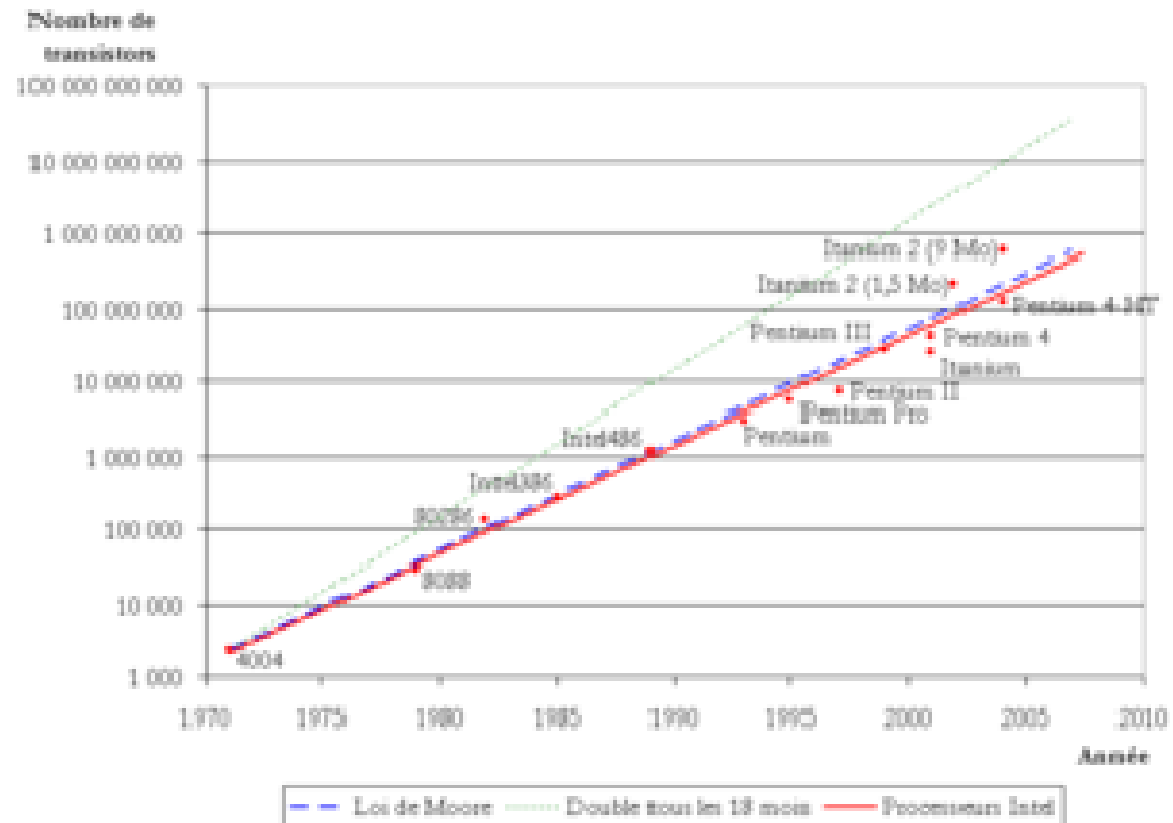
ENIAC 0,001 sec

ALU 2000 0,000 000 001 sec



π au temps des machines

- 1965 (x2/an)
Loi de Moore
- 1975 (x2/2 ans)



- 1973: 1 million de décimales (arctan)
(théorie de Moore: 8 million)

π au temps des machines

- 1976: Salamin / Brent

$$u_n = \frac{4 a_{n+1}^2}{1 - \sum_{i=1}^n 2^{i+1} (a_i^2 - g_i^2)}$$

$$a_0 = 1, \quad g_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + g_n}{2}, \quad g_{n+1} = \sqrt{a_n g_n}.$$



Convergence quadratique: 10 millions décimales

π au temps des machines

- Ramanujan (1887 – 1920)

$$\pi = \left(12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)! (13591409 + 545140134n)}{(3n!) (n!)^3 (640320)^{3n+3/2}} \right)^{-1}$$

- Jonathan et Peter Borwein



Approximations for π

Correct to
decimal
places

Babylonians	1800 BC	1
Egyptians	1600 BC	1
Archimedes	250 BC	2
Liu Hui	263	5
Tsu Ch'ung Chih	480	6
Madhava	1400	13
Ludolph van Ceulen	1596	20
Abraham Sharp	1699	71
William Rutherford	1841	152
William Shanks	1874	527
D.F. Ferguson (desk calculator)	1947	808
John Wrench (computer)	1949	2,037
Jean Guilloud (computer)	1973	1 million
G. & D. Chudnovsky (computer)	1989	1 billion
Shigeru Kondo (computer)	2010	5 trillion

