

Exercice 1

6 points

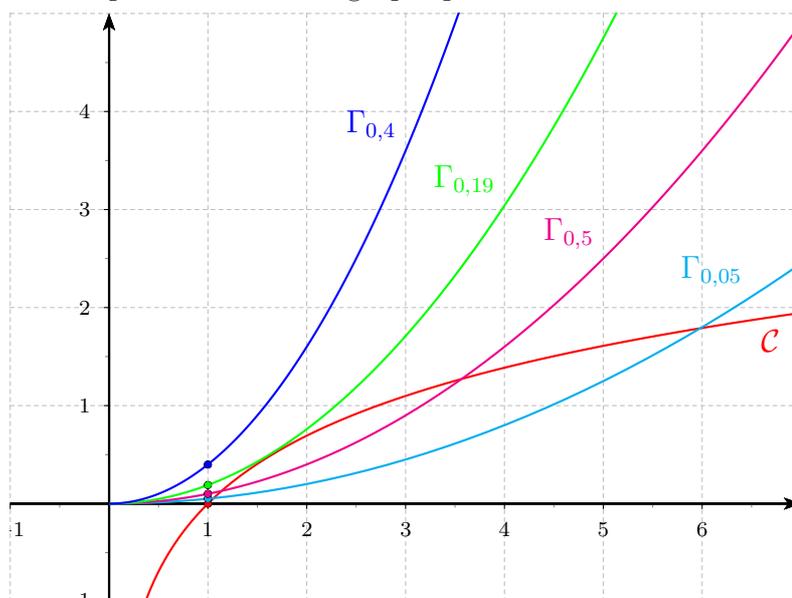
Commun à tous les candidats

Partie A

1) On peut calculer par exemple les ordonnées des points d'abscisse 1 de ces différentes courbes :

$$f(1) = \ln 1 = 0 < g_{0,05}(1) = 0,05 < g_{0,1}(1) = 0,1 < g_{0,19}(1) = 0,19 < g_{0,4}(1) = 0,4$$

On peut alors identifier chaque courbe sur le graphique :



- 2) Au vu du graphique précédent, on peut conjecturer, en posant $\alpha \simeq 0,19$, que :
- si $0 < a < \alpha$, alors la courbe Γ_a et la courbe \mathcal{C} ont deux points d'intersection ;
 - si $a = \alpha$, alors la courbe Γ_a et la courbe \mathcal{C} ont un seul point d'intersection ;
 - si $a > \alpha$, alors la courbe Γ_a et la courbe \mathcal{C} n'ont aucun point d'intersection.

Partie B

1) Soit x un réel strictement positif, et M un point d'abscisse x , alors :

$$M \in \mathcal{C} \cap \Gamma_a \iff f(x) = g_a(x) \iff f(x) - ax^2 = 0 \iff h_a(x) = 0.$$

- 2) a) Pour tout réel $x > 0$, on a $h'_a(x) = \frac{1}{x} - 2ax = \frac{1 - 2ax^2}{x}$. Comme $x > 0$, le signe de $h'_a(x)$ est le même que celui de $1 - 2ax^2$, or, sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$:

$$1 - 2ax^2 \geq 0 \iff \frac{1}{2a} \geq x^2 \iff \frac{1}{\sqrt{2a}} \geq x.$$

Le signe de $h'_a(x)$ figurant dans le tableau de variation est donc justifié.

- b) D'après le théorème de croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Pour tout réel $x > 0$, on peut écrire : $h_a(x) = x \left(\frac{\ln x}{x} - ax \right)$.

On a alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - ax \right) = -\infty$ (car $a > 0$), et évidemment $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, d'où, par produit des limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} h_a(x) = -\infty$.

3) Dans cette question $a = 0,1$.

a) Sur l'intervalle $\left]0 ; \frac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$ la fonction $h_{0,1}$ est continue et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $\left]0 ; \frac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$ sur $\left]-\infty ; \frac{-1 - \ln(0,2)}{2}\right]$. Or $\frac{-1 - \ln(0,2)}{2} \simeq 0,3$, donc $0 \in \left]-\infty ; \frac{-1 - \ln(0,2)}{2}\right]$, et l'équation $h_{0,1}(x) = 0$ admet donc une solution unique dans l'intervalle $\left]0 ; \frac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$.

b) En tenant compte des questions B1 et B3a, on peut affirmer alors que \mathcal{C} et $\Gamma_{0,1}$ possèdent deux points d'intersection.

4) Dans cette question $a = \frac{1}{2e}$.

a) Le maximum de la fonction $h_{\frac{1}{2e}}$ est atteint en $x = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2e}} = \sqrt{e}$. Donc $h_{\frac{1}{2e}}(\sqrt{e}) = \frac{-1 - \ln\left(\frac{1}{e}\right)}{2} =$

$$\frac{-1 + \ln e}{2} = \frac{-1 + 1}{2} = 0.$$

b) Le maximum de la fonction $h_{\frac{1}{2e}}$ vaut 0, l'équation $h_{\frac{1}{2e}}(x) = 0$ possède donc une unique solution. Les courbes \mathcal{C} et $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$ possèdent donc un seul point d'intersection.

5) \mathcal{C} et Γ_a n'ont aucun point d'intersection lorsque l'équation $h_a(x) = 0$ ne possède aucune solution, c'est-à-dire (cf. tableau de variation) lorsque le maximum de la fonction h_a est strictement négatif. Or :

$$\frac{-1 - \ln(2a)}{2} < 0 \iff -1 < \ln(2a) \iff e^{-1} < 2a \iff \frac{1}{2e} < a.$$

Ainsi, les courbes \mathcal{C} et Γ_a n'ont aucun point d'intersection si et seulement si $a > \frac{1}{2e}$.

Exercice 2

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1) On a :

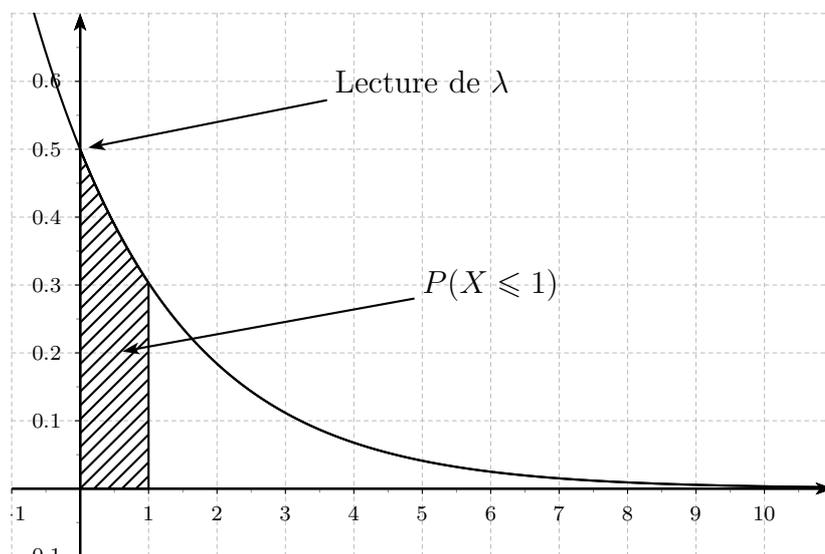
$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = F(x) - F(0) = -\left(x + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1\right).$$

2) Comme $\lambda > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-\lambda x) = -\infty$ et, d'après les croissances comparées, $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$, donc, par composition $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-\lambda x e^{-\lambda x}) = 0$. Par ailleurs $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = 0$ (toujours par composition), donc, par opérations sur les limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} (0 - 0 + 1) = \frac{1}{\lambda}.$$

Partie B

1) a) Graphiquement $P(X \leq 1)$ correspond à l'aire hachurée ci-dessous :



b) En $t = 0$, la valeur de $\lambda e^{-\lambda t}$ est égale à λ , on peut donc lire λ comme étant l'ordonnée du point d'abscisse 0 sur la courbe de la fonction densité.

2) On suppose que $E(X) = 2$.

a) On peut dire qu'en moyenne, la durée de vie d'un tel composant électronique est de 2 ans.

b) D'après la partie A (ou le cours) :

$$E(X) = 2 \iff \frac{1}{\lambda} = 2 \iff \lambda = 0,5.$$

c) D'après le cours, $P(X \leq 2) = 1 - e^{-0,5 \times 2} = 1 - e^{-1} \approx 0,63$. Ce nombre représente la probabilité que le durée de vie du composant soit inférieure à deux ans.

d) On sait que la loi exponentielle est « sans mémoire », donc :

$$\begin{aligned} P_{(X \geq 1)}(X \geq 3) &= P_{(X \geq 1)}(X \geq 2 + 1) \\ &= P(X \geq 2) \\ &= P(\overline{X \leq 2}) \\ &= 1 - P(X \leq 2) \\ &= 1 - (1 - e^{-1}) \\ &= e^{-1} \end{aligned}$$

Partie C

1) La probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an est donnée par $p(D_1 \cap D_2)$. Les deux événements étant indépendants, on a :

$$p(D_1 \cap D_2) = p(D_1) \times p(D_2) = 0,39 \times 0,30 = 0,117.$$

2) La probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an est cette fois donnée par $p(D_1 \cup D_2)$, donc :

$$p(D_1 \cup D_2) = p(D_1) + p(D_2) - p(D_1 \cap D_2) = 0,39 + 0,39 - 0,117 = 0,663.$$

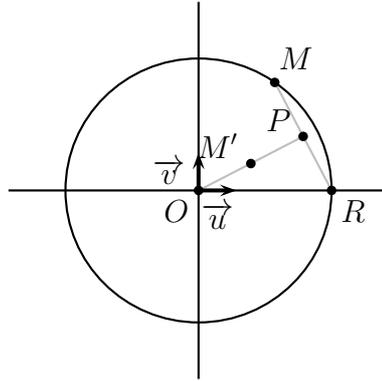
Exercice 3

4 points

Commun à tous les candidats

Partie A

- 1) Notons z_R l'affixe du point R . On a $OM = |z|$ et $OR = OM$. Le point R étant par ailleurs situé sur le demi-axe $[O ; \vec{u})$, un argument z_R est 0, donc (via par exemple la forme exponentielle) $z_R = |z|$.
- 2) Soit P le milieu du segment $[MR]$, alors $z_P = \frac{z + z_R}{2} = \frac{z + |z|}{2}$.
- Soit Q le milieu du segment $[OP]$, alors $z_Q = \frac{0 + z_P}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{z + |z|}{2} \right)$. Le point Q est donc confondu avec le point M' , ce qui justifie la construction :



Partie B

- 1) Lorsque $z_0 \in]-\infty ; 0[$, $|z_0| = -z_0$, donc $z_1 = \frac{z_0 - z_0}{4} = 0$ et $|z_1| = 0$. Montrons alors par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $z_n = 0$.

— **Initialisation.** On a vu que $z_1 = 0$, la propriété est donc vraie au rang 1.

— **Hérédité.** Supposons que, pour un certain entier naturel n non nul, $z_n = 0$.

Alors $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4} = \frac{0 + |0|}{4} = 0$. La propriété est donc héréditaire.

— **Conclusion.** Pour tout entier naturel n non nul $z_n = 0$.

On en déduit alors que, pour tout entier naturel n non nul, $|z_n| = 0$ et donc que la suite $(|z_n|)$ converge vers 0.

- 2) Lorsque $z_0 \in [0 ; +\infty[$, $|z_0| = z_0$, donc $z_1 = \frac{z_0 + z_0}{2} = \frac{1}{2}z_0$. Montrons alors par récurrence que, pour tout entier naturel n , $z_n \in [0 ; +\infty[$ et $z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n$.

— **Initialisation.** On a déjà que $z_0 \in [0 ; +\infty[$ et $z_1 = \frac{1}{2}z_0$. La propriété est donc vraie au rang 0.

— **Hérédité.** Supposons que, pour un certain entier naturel n , $z_n \in [0 ; +\infty[$ et $z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n$.

Alors il est clair que $z_{n+1} \in [0 ; +\infty[$ donc que $|z_{n+1}| = z_{n+1}$. Par conséquent :

$$z_{n+2} = \frac{z_{n+1} + |z_{n+1}|}{4} = \frac{z_{n+1} + z_{n+1}}{4} = \frac{2z_{n+1}}{4} = \frac{1}{2}z_{n+1}.$$

La propriété est donc héréditaire.

— **Conclusion.** Pour tout entier naturel n , $z_n \in [0 ; +\infty[$ et $z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n$.

La suite (z_n) est donc géométrique, de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme z_0 , donc, pour tout entier naturel n , $z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n z_0$. On en déduit que $|z_n| = \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$ et donc que $(|z_n|)$ converge vers 0 (car $-1 < \frac{1}{2} < 1$).

3) On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel.

- a) On peut conjecturer (en s'aidant de la construction graphique de la partie A par exemple) que la suite $(|z_n|)$ converge vers 0.
- b) On rappelle l'inégalité triangulaire, pour tous complexes z et z' :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|.$$

Par conséquent, pour tout entier naturel n :

$$|z_{n+1}| \leq \frac{|z_n| + |z_n|}{4} = \frac{1}{2}|z_n|. \quad (1)$$

Montrons maintenant par récurrence que, pour tout entier naturel n : $|z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$.

— **Initialisation** : On a $|z_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |z_0|$ car $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$.

— **Hérédité** : Supposons que, pour un certain entier naturel n , on a

$$|z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|.$$

Alors, en utilisant (1) :

$$|z_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|z_n| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |z_0|$$

et la propriété est donc héréditaire.

— **Conclusion** : pour tout entier naturel n , $|z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$.

On a, pour tout entier naturel n , $0 \leq |z_n| \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, le théorème de « des gendarmes » permet alors de conclure que la suite $(|z_n|)$ converge vers 0.

Exercice 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Tableau d'état des variables :

Commentaire	p	k	u
Saisie de p	2		
	2		5
1 ^{er} tour de boucle	2	1	1
2 ^e tour de boucle	2	2	-0,5

La valeur affichée en sortie est donc $-0,5$.

Partie B

1) Voici l'algorithme modifié :

Variation : k et p sont des entiers naturels
 u est un réel

Entrée : Demander la valeur de p

Traitement : Affecter à u la valeur 5
 Pour k variant de 1 à p
 Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k - 1) - 1,5$
 Afficher u
 Fin de pour

2) La suite (u_n) n'est pas décroissante puisque $u_4 > u_3$.3) Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 3$, $u_{n+1} > u_n$.

- **Initialisation.** On a vu précédemment que $u_4 > u_3$, la propriété est donc vraie pour $n = 3$.
- **Hérédité.** Supposons que, pour un certain entier $n \geq 3$, on a $u_{n+1} > u_n$, alors $0,5u_{n+1} > 0,5u_n$. Par ailleurs $n + 1 > n$ donc $0,5(n + 1) > 0,5n$, par somme on a alors $0,5u_{n+1} + 0,5(n + 1) > 0,5u_n + 0,5n$, puis, en ajoutant $-1,5$ membre à membre : $0,5u_{n+1} + 0,5(n + 1) - 1,5 > 0,5u_n + 0,5n - 1,5$, c'est-à-dire $u_{n+2} > u_{n+1}$. La propriété est donc héréditaire.
- **Conclusion.** Pour tout entier $n \geq 3$, $u_{n+1} > u_n$.

En d'autres termes la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 3.4) Soit n un entier naturel quelconque, alors :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= 0,1u_{n+1} - 0,1(n + 1) + 0,5 \\
 &= 0,1(0,5u_n + 0,5n - 1,5) - 0,1n - 0,1 + 0,5 \\
 &= 0,05u_n + 0,05n - 0,15 - 0,1n + 0,4 \\
 &= 0,05u_n - 0,05n + 0,25 \\
 &= 0,5(0,1u_n - 0,1n + 0,5) \\
 &= 0,5v_n.
 \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 0,5.Comme $v_0 = 0,1 \times 5 - 0,1 \times 0 + 0,5 = 1$, on en déduit que, pour tout entier naturel n , $v_n = 0,5^n$.5) D'après les deux questions qui précèdent, on peut écrire que, pour tout entier naturel n :

$$0,5^n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5.$$

En multipliant par 10 membre à membre on a alors $10 \times 0,5^n = u_n - n + 5$ d'où l'on déduit aisément que $u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$.6) $-1 < 0,5 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$. De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 5) = +\infty$, donc, par somme : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

1) Tableau d'état des variables :

Commentaire	a	b	c
Entrées	26		
	26	9	
Traitement	26	9	8
1 ^{er} tour de boucle	9	9	8
	9	8	8
	9	8	1
2 ^e tour de boucle	8	8	1
	8	1	1
	8	1	0
Fin de la boucle ($c = 0$) et affichage	8	1	0

2) L'algorithme modifié est le suivant :

Variables :	c est un entier naturel a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrées :	Demander a Demander b
Traitement :	Affecter à c le nombre $r(a, b)$ Tant que $c \neq 0$: Affecter à a le nombre b Affecter à b la valeur de c Affecter à c le nombre $r(a, b)$ Fin Tant que Si $b = 1$: Afficher « les nombres sont premiers entre eux » Sinon : Afficher « les nombres ne sont pas premiers entre eux » Fin du Si

Partie B

- 1) a) La lettre V correspond à $x = 21$. $9 \times 21 + 2 = 191$, et $191 \equiv 9 [26]$, donc $x' = 9$, ce qui correspond bien à la lettre J.
- b) On rappelle le théorème de Bézout : a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.
Ici 9 et 26 sont premiers entre eux, le théorème s'applique donc.
Le couple $(u, v) = (3, -1)$ convient puisque $9 \times 3 + 26 \times (-1) = 1$.
- c) Supposons que $x' \equiv 9x + 2 [26]$, alors, en multipliant par 3 membre à membre : $3x' \equiv 3 \times 9x + 6 [26]$, or d'après la question précédente $9 \times 3 \equiv 1 [26]$, donc $3x' \equiv x + 6 [26]$ d'où $x \equiv 3x' - 6 [26]$ et comme $-6 \equiv 20 [26]$, on a bien $x \equiv 3x' + 20 [26]$.
Réciproquement, supposons que $x \equiv 3x' + 20 [26]$, alors, en multipliant par 9 membre à membre : $9x \equiv 9 \times 3x' + 180 [26]$. Or $9 \times 3 \equiv 1 [26]$ et $180 \equiv -2 [26]$, donc $9x \equiv x' - 2 [26]$, d'où $x' \equiv 9x + 2 [26]$.
L'équivalence est alors démontrée.

- d) La lettre R correspond à $x' = 17$, alors $3x' + 20 = 71$, or $71 \equiv 19 [26]$, donc $x = 19$, ce qui correspond à la lettre T.
- 2) On a ici $x = 9$, $x' = 3$ et $q = 2$, donc $3 = 9p + 2 [26]$ ce qui équivaut à $9p \equiv 1 [26]$. En multipliant par 3 membre à membre : $3 \times 9p = 3 [26]$, or on a vu que $3 \times 9 \equiv 1 [26]$, donc on obtient que $p \equiv 3 [26]$, d'où, comme $0 \leq p \leq 25$, l'unique valeur $p = 3$.
- 3) B correspond à $x = 1$. $13x + 2 = 15$ donc B est codé par la lettre P
D correspond à $x = 3$. $13x + 2 = 41$ et $41 \equiv 15 [26]$, donc D est également codé par la lettre P
Ce codage ne peut convenir car une lettre P dans le message crypté peut correspondre à B ou D, d'où ambiguïté dans le décryptage.