

## Exercice 1

6 points

Commun à tous les candidats

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = \ln x$ .

Pour tout réel  $a$  strictement positif, on définit sur  $]0 ; +\infty[$  la fonction  $g_a$  par  $g_a(x) = ax^2$ .

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$  et  $\Gamma_a$  celle de la fonction  $g_a$  dans un repère du plan. Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_a$  suivant les valeurs du réel strictement positif  $a$ .

## Partie A

On a construit en **annexe 1** (à rendre avec la copie) les courbes  $\mathcal{C}$ ,  $\Gamma_{0,05}$ ,  $\Gamma_{0,1}$ ,  $\Gamma_{0,19}$  et  $\Gamma_{0,4}$ .

- 1) Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.
- 2) Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_a$  suivant les valeurs (à préciser) du réel  $a$ .

## Partie B

Pour un réel  $a$  strictement positif, on considère la fonction  $h_a$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par

$$h_a(x) = \ln x - ax^2.$$

- 1) Justifier que  $x$  est l'abscisse d'un point  $M$  appartenant à l'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_a$  si et seulement si  $h_a(x) = 0$ .
- 2) a) On admet que la fonction  $h_a$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$ , et on note  $h'_a$  la dérivée de la fonction  $h_a$  sur cet intervalle.

Le tableau de variation de la fonction  $h_a$  est donné ci-dessous.

Justifier, par le calcul, le signe de  $h'_a(x)$  pour  $x$  appartenant à  $]0 ; +\infty[$ .

|                     |                           |                      |           |
|---------------------|---------------------------|----------------------|-----------|
| $x$                 | 0                         | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $+\infty$ |
| Signe de $h'_a(x)$  | +                         | 0                    | −         |
| Variations de $h_a$ | $\frac{-1 - 2\ln(2a)}{2}$ |                      |           |

- b) Rappeler la limite de  $\frac{\ln x}{x}$  en  $+\infty$ . En déduire la limite de la fonction  $h_a$  en  $+\infty$ .

On ne demande pas de justifier la limite de  $h_a$  en 0.

- 3) Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que  $a = 0,1$ .

- a) Justifier que, dans l'intervalle  $\left]0 ; \frac{1}{\sqrt{0,2}}\right]$ , l'équation  $h_{0,1}(x) = 0$  admet une unique solution.

On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

- b) Quel est le nombre de points d'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_{0,1}$  ?

- 4) Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que  $a = \frac{1}{2e}$ .
- Déterminer la valeur du maximum de  $h_{\frac{1}{2e}}$ .
  - En déduire le nombre de points d'intersection des courbes  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$ . Justifier.
- 5) Quelles sont les valeurs de  $a$  pour lesquelles  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma_a$  n'ont aucun point d'intersection ? Justifier.

**Exercice 2****5 points****Commun à tous les candidats**

*La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B*

**Partie A**

On considère une variable aléatoire  $X$  qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  avec  $\lambda > 0$ .  
On rappelle que, pour tout réel  $a$  strictement positif,

$$P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de  $X$ , notée  $E(X)$ , et définie par

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt.$$

On note  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

On admet que la fonction  $F$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda t}$  est une primitive sur  $\mathbb{R}$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$ .

- 1) Soit  $x$  un nombre réel strictement positif. Vérifier que

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \left( -\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1 \right).$$

- 2) En déduire que  $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ .

**Partie B**

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée  $X$  suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  avec  $\lambda > 0$ .

La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe 2**.

- 1) Sur le graphique de l'annexe 2 (à rendre avec la copie) :
- Représenter la probabilité  $P(X \leq 1)$ .
  - Indiquer où se lit directement la valeur de  $\lambda$ .
- 2) On suppose que  $E(X) = 2$ .
- Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $X$  ?
  - Calculer la valeur de  $\lambda$ .
  - Calculer  $P(X \leq 2)$ . On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près. Interpréter ce résultat.

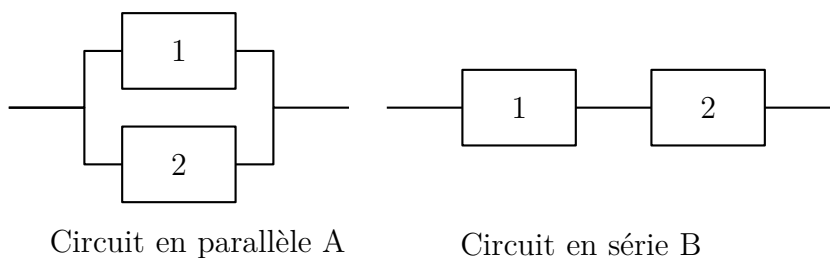
- d) Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

### Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note  $D_1$  l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note  $D_2$  l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».

On suppose que les deux événements  $D_1$  et  $D_2$  sont indépendants et que  $P(D_1) = P(D_2) = 0,39$ .

Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :

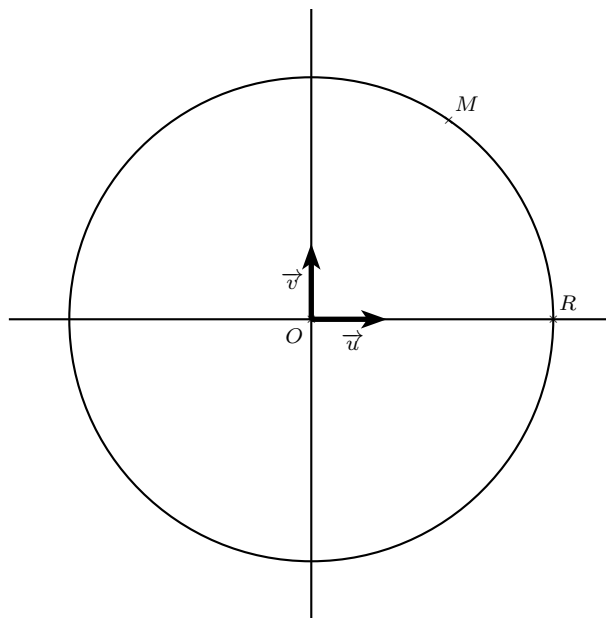


- 1) Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
- 2) Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

**Exercice 3****4 points****Commun à tous les candidats****Partie A**

On appelle  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}; \vec{v})$  on a placé un point  $M$  d'affixe  $z$  appartenant à  $\mathbb{C}$ , puis le point  $R$  intersection du cercle de centre  $O$  passant par  $M$  et du demi-axe  $[O; \vec{u})$ .



- 1) Exprimer l'affixe du point  $R$  en fonction de  $z$ .
- 2) Soit le point  $M'$  d'affixe  $z'$  définie par

$$z' = \frac{1}{2} \left( \frac{z + |z|}{2} \right).$$

Reproduire la figure sur la copie et construire le point  $M'$ .

**Partie B**

On définit la suite de nombres complexes  $(z_n)$  par un premier terme  $z_0$  appartenant à  $\mathbb{C}$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}.$$

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite  $(|z_n|)$  dépend du choix de  $z_0$ .

- 1) Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite  $(|z_n|)$  quand  $z_0$  est un nombre réel négatif?
- 2) Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite  $(|z_n|)$  quand  $z_0$  est un nombre réel positif?
- 3) On suppose désormais que  $z_0$  n'est pas un nombre réel.
  - a) Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite  $(|z_n|)$ ?
  - b) Démontrer cette conjecture, puis conclure.

## Exercice 4

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

## Partie A

On considère l'algorithme suivant :

|                     |                                                                                                                                |
|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Variables :</b>  | $k$ et $p$ sont des entiers naturels<br>$u$ est un réel                                                                        |
| <b>Entrée :</b>     | Demander la valeur de $p$                                                                                                      |
| <b>Traitement :</b> | Affecter à $u$ la valeur 5<br>Pour $k$ variant de 1 à $p$<br>Affecter à $u$ la valeur $0,5u + 0,5(k - 1) - 1,5$<br>Fin de pour |
| <b>Sortie :</b>     | Afficher $u$                                                                                                                   |

Faire fonctionner cet algorithme pour  $p = 2$  en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.  
Quel nombre obtient-on en sortie ?

## Partie B

Soit  $(u_n)$  la suite définie par son premier terme  $u_0 = 5$  et, pour tout entier naturel  $n$  par

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

- 1) Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de  $u_n$  pour  $n$  variant de 1 à  $p$ .
- 2) Á l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi  $p = 4$ , on obtient les résultats suivants :

|       |   |      |       |        |
|-------|---|------|-------|--------|
| $n$   | 1 | 2    | 3     | 4      |
| $u_n$ | 1 | -0,5 | -0,75 | -0,375 |

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite  $(u_n)$  est décroissante ?  
Justifier.

- 3) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3,  $u_{n+1} > u_n$ .  
Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite  $(u_n)$  ?
- 4) Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$ .  
Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors  $v_n$  en fonction de  $n$ .
- 5) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5.$$

- 6) Déterminer alors la limite de la suite  $(u_n)$ .

## Exercice 4

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

*Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.*

## Partie A

Pour deux entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$ , on note  $r(a, b)$  le reste dans la division euclidienne de  $a$  par  $b$ .  
On considère l'algorithme suivant :

|                     |                                                                                                                                                                                            |
|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Variables :</b>  | $c$ est un entier naturel<br>$a$ et $b$ sont des entiers naturels non nuls                                                                                                                 |
| <b>Entrées :</b>    | Demander $a$<br>Demander $b$                                                                                                                                                               |
| <b>Traitement :</b> | Affecter à $c$ le nombre $r(a, b)$<br>Tant que $r(a, b) \neq 0$ :<br>Affecter à $a$ le nombre $b$<br>Affecter à $b$ la valeur de $c$<br>Affecter à $c$ le nombre $r(a, b)$<br>Fin Tant que |
| <b>Sortie :</b>     | Afficher $b$                                                                                                                                                                               |

- 1) Faire fonctionner cet algorithme avec  $a = 26$  et  $b = 9$  en indiquant les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  à chaque étape.
- 2) Cet algorithme donne en sortie le PGCD des entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$ .  
Le modifier pour qu'il indique si deux entiers naturels non nuls  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux.

## Partie B

À chaque lettre de l'alphabet on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K  | L  | M  |
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| N  | O  | P  | Q  | R  | S  | T  | U  | V  | W  | X  | Y  | Z  |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

**Étape 1 :** on choisit deux entiers naturels  $p$  et  $q$  compris entre 0 et 25.

**Étape 2 :** à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier  $x$  correspondant dans le tableau ci-dessus.

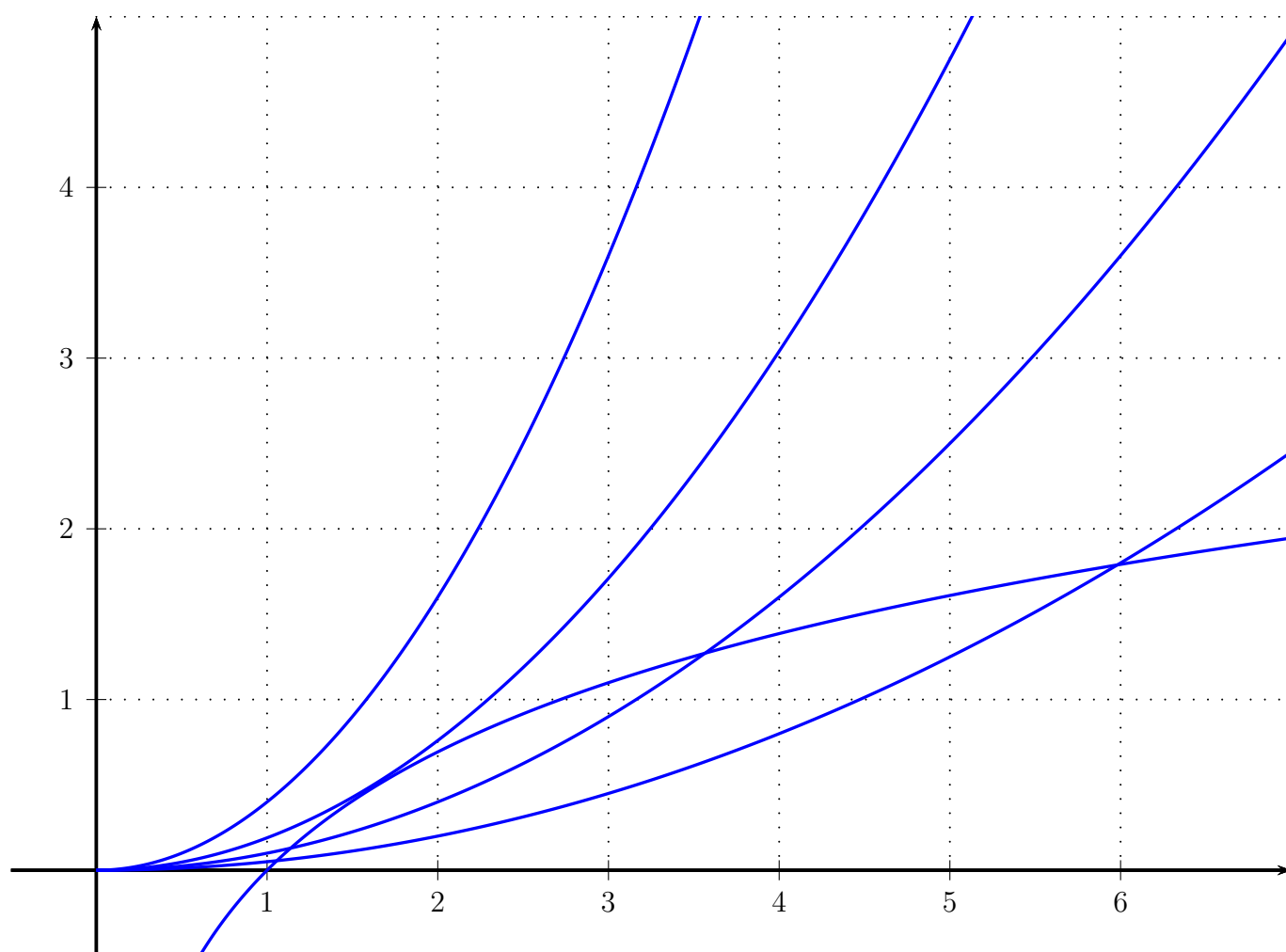
**Étape 3 :** on calcule l'entier  $x'$  défini par les relations  $x' \equiv px + q[26]$  et  $0 \leq x' \leq 25$ .

**Étape 4 :** à l'entier  $x'$ , on associe la lettre correspondante dans le tableau.

- 1) Dans cette question on choisit  $p = 9$  et  $q = 2$ .
  - a) Démontrer que la lettre V est codée par la lettre J .
  - b) Citer le théorème qui permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $9u + 26v = 1$ . Donner sans justifier un couple  $(u, v)$  qui convient.
  - c) Démontrer que  $x' \equiv 9x + 2[26]$  équivaut à  $x \equiv 3x' + 20[26]$ .
  - d) Décoder la lettre R.
- 2) Dans cette question, on choisit  $q = 2$  et  $p$  est inconnu. On sait que J est codé par D.  
Déterminer la valeur de  $p$  (on admettra que  $p$  est unique).
- 3) Dans cette question, on choisit  $p = 13$  et  $q = 2$ . Coder les lettre B et D. Que peut-on dire de ce codage

## À RENDRE AVEC LA COPIE

## ANNEXE 1 de l'exercice 1



## À RENDRE AVEC LA COPIE

## ANNEXE 2 de l'exercice 2

