BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2015

MATHÉMATIQUES

Série ES

Durée de l'épreuve : 3 heures **Coefficient : 7 (ES)**

ES : ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

- *Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.*
- *Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*
- *Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.*
- *Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.*

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6 et une **annexe à rendre avec la copie**.

EXERCICE 1 (5 points) Commun à tous les candidats

Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse, plusieurs réponses ou l'absence de réponse ne rapportent, ni n'enlèvent aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. Soit la fonction f définie sur $[1\,;100]$ par $f(x) = 200\ln x + 10x$, $f'(x)$ désigne la fonction dérivée de f. On a :

a. $f'(x) = 200 + \dfrac{1}{x}$ **b.** $f'(x) = \dfrac{200}{x} + 10$ **c.** $f'(x) = 200 + 10x$ **d.** $f'(x) = \dfrac{200}{x} + 10x$

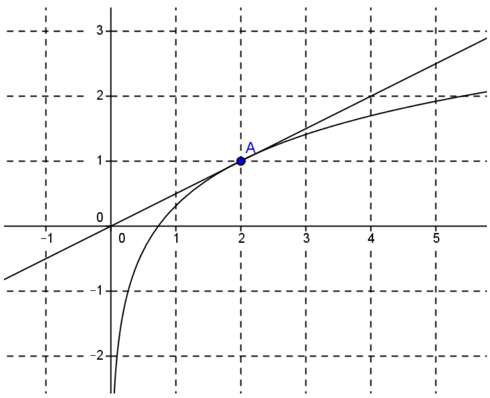
2. On note L une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction ln. Cette fonction L est :

a. croissante puis décroissante
b. décroissante sur $]0\,;+\infty[$
c. croissante sur $]0\,;+\infty[$
d. décroissante puis croissante

3. La fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x - \ln x$ est :

a. convexe sur $]0\,;+\infty[$
b. concave sur $]0\,;+\infty[$
c. ni convexe ni concave sur $]0\,;+\infty[$
d. change de convexité sur $]0\,;+\infty[$

4. On a représenté ci-dessous la courbe représentative d'une fonction h définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$ ainsi que sa tangente au point A d'abscisse 2. Par lecture graphique, on peut conjecturer que :



a. $h'(2) = 2$

b. $h'(2) = \dfrac{1}{2}$

c. $h'(2) = 0$

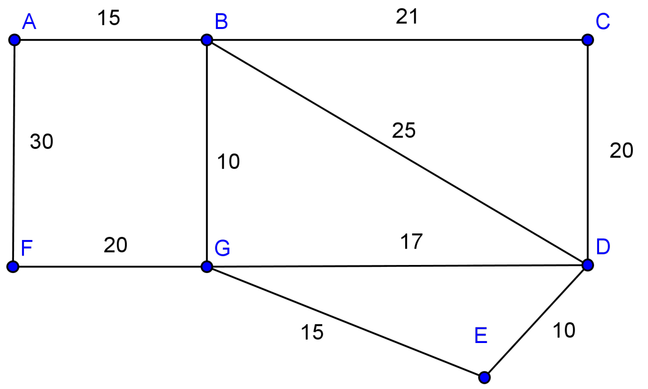
d. $h'(2) = 1$

5. La variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart type σ inconnu mais on sait que $P(-10 < X < 10) = 0,8$. On peut en déduire :

a. $P(X < 10) = 0,1$
b. $P(X < 10) = 0,2$
c. $P(X < 10) = 0,5$
d. $P(X < 10) = 0,9$

EXERCICE 2 (5 points) Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Un cycliste désire visiter plusieurs villages notés A, B, C, D, E, F et G reliés entre eux par un réseau de pistes cyclables.
Le graphe suivant schématise son plan ; les arêtes représentent les pistes cyclables et les distances sont en kilomètre.



Partie A

Pour faire son parcours, le cycliste décide qu'il procèdera selon l'algorithme ci-dessous :

ligne 1	Marquer sur le plan tous les villages comme non « visités »
ligne 2	Choisir un village de départ
ligne 3	Visiter le village et le marquer « visité »
ligne 4	Rouler vers le village le plus proche
ligne 5	Tant que le village où il arrive n'est pas un village déjà visité
ligne 6	visiter le village et le marquer « visité »
ligne 7	rouler vers le village le plus proche sans revenir en arrière
ligne 8	Fin Tant que
ligne 9	afficher la liste des villages visités

1. Quelle propriété du graphe permet à la *ligne 4* d'être toujours exécutable ?
2. En partant du village noté G, quelle sera la liste des villages visités ?
3. Existe-t-il un village de départ qui permette, en suivant cet algorithme, de visiter tous les villages ?
4. Le cycliste abandonne l'idée de suivre l'algorithme. Il souhaite maintenant, partant d'un village, y revenir après avoir emprunté toutes les pistes cyclables une et une seule fois. Cela sera-t-il possible ?

Partie B

1. Écrire la matrice M de transition de ce graphe (dans l'ordre `A`, `B`, `C`,...,`G`).
2. On donne la matrice M^4 :

$$M^4 = \begin{array}{c} \\ \mathtt{A} \\ \mathtt{B} \\ \mathtt{C} \\ \mathtt{D} \\ \mathtt{E} \\ \mathtt{F} \\ \mathtt{G} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \mathtt{A} & \mathtt{B} & \mathtt{C} & \mathtt{D} & \mathtt{E} & \mathtt{F} & \mathtt{G} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 5 & 9 & 11 & 4 & \mathbf{1} & 16 \\ 5 & 30 & 12 & 23 & 18 & 16 & 16 \\ 9 & 12 & 12 & 14 & 9 & 4 & 18 \\ 11 & 23 & 14 & 28 & 14 & 11 & 23 \\ 4 & 18 & 9 & 14 & 12 & 9 & 12 \\ 1 & 16 & 4 & 11 & 9 & 10 & 5 \\ 16 & 16 & 18 & 23 & 12 & 5 & 30 \end{pmatrix} \end{array}$$

Interpréter le terme en gras, ligne `A`, colonne `F` (valant **1**) dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 3 (4 points) Commun à tous les candidats

Un couple fait un placement au taux annuel de 2 % dont les intérêts sont capitalisés tous les ans. Son objectif est de constituer un capital de 18 000 euros.

Le couple a placé le montant de 1 000 euros à l'ouverture le 1er janvier 2010 puis, tous les ans à chaque 1er janvier, verse 2 400 euros.

1. Déterminer le capital présent sur le compte le 1er janvier 2011 après le versement annuel.

2. On veut déterminer la somme présente sur le compte après un certain nombre d'années. On donne ci-dessous trois algorithmes :

algorithme 1

```
Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Entrée
  Saisir une valeur pour N
Début traitement
  Affecter 1000 à U
  Pour i de 1 à N faire
    | Affecter 1,02×U+2400 à U
  Fin Pour
  Afficher U
Fin traitement
```

algorithme 2

```
Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Entrée
  Saisir une valeur pour N
Début traitement
  Pour i de 1 à N faire
    | Affecter 1000 à U
    | Affecter 1,02×U+2400 à U
  Fin Pour
  Afficher U
Fin traitement
```

algorithme 3

```
Variables :
U est un nombre réel
i et N sont des nombres entiers
Entrée
  Saisir une valeur pour N
Début traitement
  Affecter 1000 à U
  Pour i de 1 à N faire
    | Affecter 1,02×U+2400 à U
    | Affecter N+1 à N
  Fin Pour
  Afficher U
Fin traitement
```

a. Pour la valeur 5 de N saisie dans l'algorithme 1, recopier puis compléter, en le prolongeant avec autant de colonnes que nécessaire, le tableau ci-dessous (arrondir les valeurs calculées au centième).

***valeur de* i**	xxx	1	...
***valeur de* U**	1000		...

b. Pour la valeur 5 de N saisie, quel affichage obtient-on en sortie de cet algorithme ? Comment s'interprète cet affichage ?

c. En quoi les algorithmes 2 et 3 ne fournissent pas la réponse attendue ?

3. À partir de la naissance de son premier enfant en 2016, le couple décide de ne pas effectuer le versement du premier janvier 2017 et de cesser les versements annuels tout en laissant le capital sur ce compte rémunéré à 2 %.
Au premier janvier de quelle année l'objectif de 18 000 euros est-il atteint ?

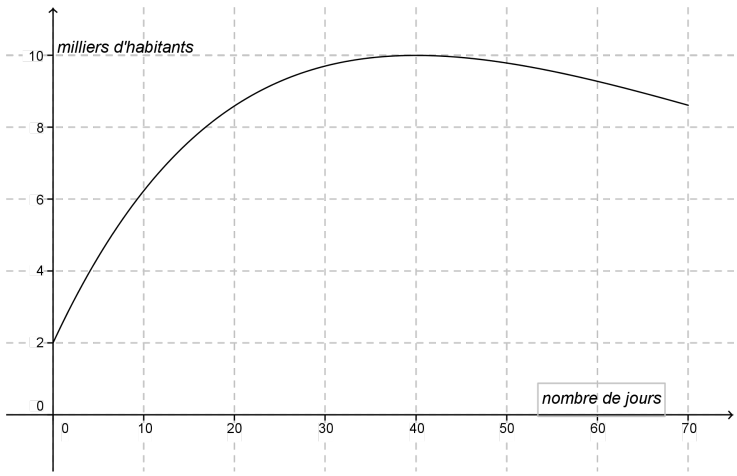
EXERCICE 4 (6 points) Commun à tous les candidats

L'évolution de la population d'une station balnéaire pour l'été 2015 a été modélisée par une fonction f, définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 70]$, dont la courbe représentative est donnée ci-dessous.

Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1er juillet, $f(x)$ désigne la population en milliers d'habitants.

Ainsi $x = 30$ correspond au 31 juillet et $f(30)$ représente la population qu'il est prévu d'accueillir le 31 juillet.

On estime qu'un habitant utilisera chaque jour entre 45 et 55 litres d'eau par jour.



Partie A *Dans cette partie, les réponses sont à fournir par lecture graphique.*

1. **a.** Estimer le nombre maximal d'habitants présents dans la station balnéaire selon ce modèle durant l'été 2015 et préciser à quelle date ce maximum serait atteint.
   b. La commune est en capacité de fournir 600 000 litres d'eau par jour, est-ce suffisant ?
2. Estimer le nombre de jours durant lesquels le nombre d'habitants de la station balnéaire devrait rester supérieur à 80 % du nombre maximal prévu.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 70]$ par $f(x) = 2 + 0,2x\mathrm{e}^{-0,025x+1}$.

1. Calculer $f(9)$ puis vérifier que la consommation d'eau le 10 juillet serait, selon ce modèle, au plus de 324 890 litres.
2. **a.** Démontrer que $f'(x) = (0,2 - 0,005\,x)\mathrm{e}^{-0,025x+1}$ où f' est la fonction dérivée de f.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 70]$.
   c. En déduire la date de la consommation d'eau maximale.

Partie C

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 70]$ par $g(x) = 55\,f(x) = 110 + 11x\mathrm{e}^{-0,025x+1}$.
Lorsque x est le nombre de jours écoulés après le 1er juillet, $g(x)$ représente alors la consommation maximale d'eau prévue ce jour là et exprimée en m^3.
Soit la fonction G définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 70]$ par $G(x) = 110x - (440x + 17\,600)\,\mathrm{e}^{-0,025x+1}$.
On admet que la fonction G est une primitive de la fonction g.
La somme $S = g(10) + g(11) + g(12) + \cdots + g(20)$ représente la consommation maximale d'eau du 10^{ieme} au 20^{ieme} jour exprimée en m^3.

1. En l'illustrant sur la courbe C_g de l'**annexe** à rendre avec la copie, donner une interprétation graphique en termes d'aires de la somme S.
2. En déduire une valeur approximative de cette quantité d'eau consommée du 10^{ieme} au 20^{ieme} jour.

ANNEXE

Annexe à l'exercice 4 à rendre avec la copie