BACCALAURÉAT TECHNOLOGIQUE

SESSION 2017

Série STL – Biotechnologies

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 HEURES

COEFFICIENT : 4

CALCULATRICE AUTORISÉE

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la réglementation en vigueur.

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de la page 1/6 à la page 6/6.

Avant de composer, assurez-vous que l'exemplaire qui vous a été remis est bien complet.

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront dans l'appréciation des copies.

Les exercices du sujet sont indépendants et peuvent être traités séparément dans l'ordre choisi par le candidat.

EXERCICE 1 (4 points)

Les 2 questions sont indépendantes.

Dans cet exercice, on s'intéresse à l'indice de masse corporelle (poids en kg divisé par le carré de la taille en m), noté IMC, de personnes adultes, âgées de 18 à 74 ans.

Une personne est considérée « maigre » si son IMC est inférieur à 18,5.
Elle est considérée « de poids normal » si son IMC est compris entre 18,5 et 25.
Elle est considérée « en surpoids » si son IMC est compris entre 25 et 30.
Elle est considérée « obèse » si son IMC est supérieur à 30.

Les probabilités seront arrondies à 10^{-3}.

1. On note X la variable aléatoire qui, à une personne adulte prise au hasard, associe son IMC. Dans cette question, on suppose que X suit la loi normale d'espérance 24,9 et d'écart type 5,3. On prend une personne au hasard dans la population.

a) Déterminer la probabilité que cette personne soit « en surpoids ».

b) Déterminer la probabilité que cette personne soit « maigre ».

2. On suppose qu'en France, la proportion d'adultes obèses est de 15 %.

a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de personnes obèses dans un échantillon de taille 800. Arrondir les bornes de l'intervalle à 10^{-3}.

b) Dans le cadre d'un plan de prévention planifié par une région française, une agence de santé indépendante a réalisé une enquête au cours de laquelle a été mesuré l'IMC de 800 personnes adultes habitant cette région. Parmi celles-ci, 148 ont un IMC supérieur à 30.

Peut-on considérer que la population de cette région comporte une proportion d'adultes obèses conforme à la moyenne nationale ou, au contraire, qu'il y a lieu d'envisager des actions de prévention contre l'obésité ? Justifier la réponse.

EXERCICE 2 (4 points)

QUESTIONNAIRE À CHOIX MULTIPLE

Pour chaque question, une seule des réponses proposées est exacte. Chaque bonne réponse rapporte un point, une mauvaise réponse ou l'absence de réponse n'enlève pas de point.

Donner sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée et une seule réponse est attendue par question.

1. On injecte à un patient une dose de 5 mL d'une solution antibiotique, ce qui correspond à une dose de 5 mg d'antibiotique. La quantité d'antibiotique présente dans le sang diminue chaque heure de 5,5 %.

Au bout de combien d'heures révolues la quantité de médicament restant dans le sang sera-t-elle passée sous le seuil des 20 % de la quantité injectée au départ du traitement ?

a) 9 **b)** 28 **c)** 57 **d)** 29

2. Dans un échantillon de 136 personnes prélevé dans la population d'une ville, on observe que 57 d'entre elles portent des lunettes. On appelle p la proportion des personnes portant des lunettes dans la population.

L'intervalle de confiance dont les bornes sont arrondies à 10^{-2}, au niveau 95 %, pour la proportion p est :

a) [0,35 ; 0,49] **b)** [0,47 ; 0,67] **c)** [0,41 ; 0,43] **d)** [0,34 ; 0,50]

3. Une variable aléatoire Y suit une loi exponentielle de paramètre 3,5.
La probabilité $P\,(0{,}4 \leq Y \leq 0{,}8)$, approchée à 0,001 près, est égale à :

a) 0,186 **b)** 0,650 **c)** 0,734 **d)** 0,286

4. On rappelle que la fonction ALEA() d'un tableur renvoie un nombre aléatoire compris entre 0 et 1, et simule une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 1].

On souhaite simuler une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle [-1 ; 1]. Quelle formule faut-il écrire dans le tableur ?

a) $= 2 \times \text{ALEA}() - 1$

b) $= (\text{ALEA}() + 1) \div 2$

c) $= 2 \times \text{ALEA}()$

d) $= \ln(\text{ALEA}()\,)$

EXERCICE 3 (4 points)

On administre à un patient un médicament par voie intraveineuse. Ainsi la concentration du produit actif est quasi immédiatement maximale après l'injection, puis elle diminue de 3 % par minute.

On notera C_0 la concentration à l'instant $t = 0$ minute et C_n la concentration en $\text{mg} \cdot \text{L}^{-1}$ au bout de n minutes.

On pose $C_0 = 1$.

1. Justifier que la suite (C_n) est géométrique. Préciser sa raison.

2. Exprimer C_n en fonction de n.

3. En résolvant une inéquation, déterminer à partir de quelle valeur de n la concentration du produit actif aura diminué de moitié.

4. On considère le premier algorithme suivant :

```
Variables : K est un nombre réel
Initialisation: K prend la valeur 1

Traitement:   Répéter 5 fois
                    K prend la valeur 0,97*K
Sortie:       Afficher K
```

a) Quelle est la valeur K affichée à l'issue de l'exécution de cet algorithme ? On arrondira à 0,0001.

b) Quelle interprétation peut-on donner de cette valeur de K en terme de concentration du médicament ?

5. On considère maintenant l'algorithme suivant :

```
Variables : i est un entier naturel, K est un nombre réel
Initialisation: K prend la valeur 1
                i prend la valeur 0
Traitement:   Tant que K > 0,5
                    i prend la valeur i + 1
                    K prend la valeur 0,97*K
Sortie:       Afficher i
```

a) Expliquer pourquoi cet algorithme exécutera plus de 5 itérations de la boucle « Tant que ».

b) Quel résultat l'exécution de cet algorithme permet-elle de retrouver ?

EXERCICE 4 (8 points)

PARTIE A – ÉTUDE STATISTIQUE

Les immunoglobulines G, notées IgG, sont des anticorps qui interviennent dans l'élimination d'antigènes. On étudie la concentration d'IgG dans le sang d'un patient au fil des semaines lors du contact avec un antigène. On a recueilli les informations consignées dans le tableau suivant, où t_i est le temps en semaines écoulées après ce contact et y_i le taux d'immunoglobuline G en $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$:

Temps t_i en semaines	1	2	3	4	5	6
Taux y_i d'IgG en g.L^{-1}	13,4	14,7	13,9	12,8	11,7	10,5

On pose $z = \ln\left(\frac{y}{t}\right)$.

1. Recopier sur vote copie et compléter le tableau suivant, les résultats seront arrondis à 10^{-2} :

t_i	1	2	3	4	5	6
$z_i = \ln\left(\frac{y_i}{t_i}\right)$	2,60				0,85	

2. Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite de régression linéaire de z en t, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis à 10^{-2} près.

3. Déterminer un ajustement de y en fonction de t de la forme $y = a\,t\,\mathrm{e}^{b\,t}$ où a et b sont des nombres réels. On arrondira les a et b au dixième.

4. Estimer le taux d'IgG à la 8$^{\text{e}}$ semaine à l'aide de l'expression de la question **3**. Arrondir à 10^{-1}.

PARTIE B – ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 17{,}3\,t\,\mathrm{e}^{-\,0{,}4\,t}$. On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère.

1. On donne : $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. On note f' la dérivée de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

   Montrer que pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = (17{,}3 - 6{,}92\,t)\mathrm{e}^{-0{,}4\,t}$.

3. a) Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   b) Établir le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

4. Soit F la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $F(t) = (-108{,}125 - 43{,}25\ t)\mathrm{e}^{-0{,}4\ t}$.

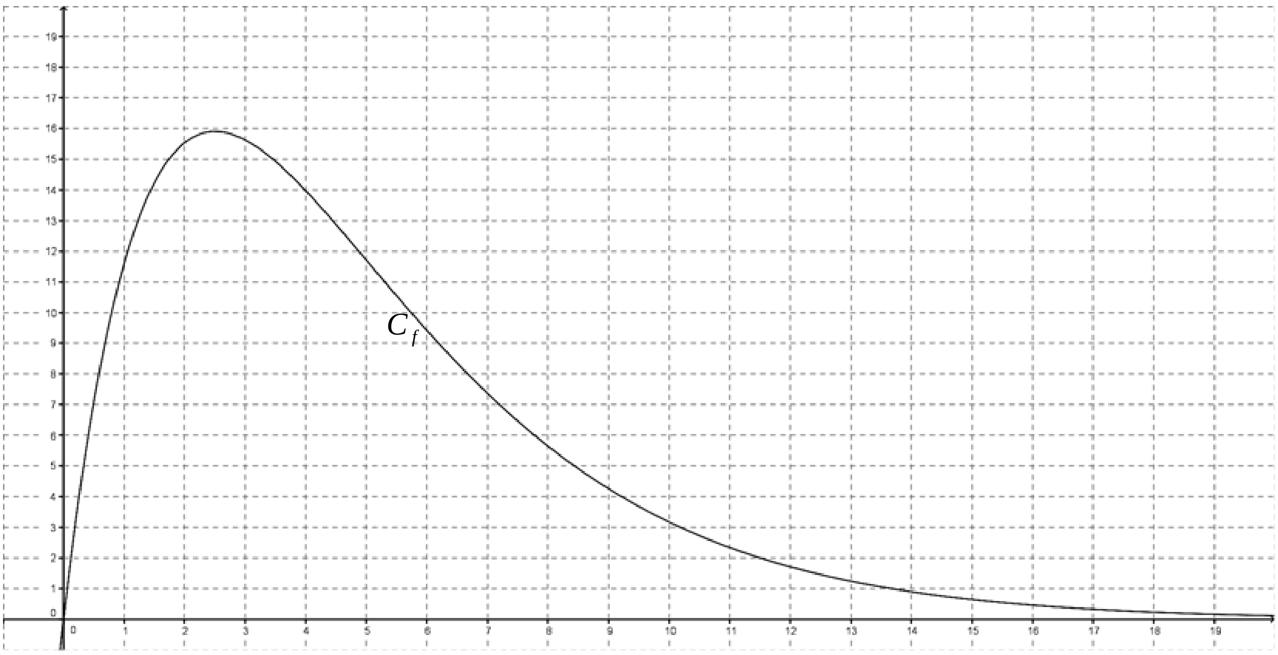
   Montrer que F est une primitive de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

5. La valeur moyenne de f sur $[a\ ;b]$ est donnée par la formule : $V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt.$

   Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1;5]$. On donnera la valeur approchée arrondie à 10^{-1} près.

PARTIE C – INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS DE LA PARTIE B

On note C_f la courbe de la fonction f représentée dans le repère ci-dessous. (f est la fonction définie dans la partie B)



On suppose que $f(t)$ représente le taux d'IgG en $\mathrm{g \cdot L^{-1}}$ en fonction du temps t en semaines (écoulées après contact avec l'antigène), où la fonction f est celle de la partie B.

1. Quel est le taux maximal d'IgG du patient ? Quand ce taux est-il atteint ?

2. Le test sérologique d'IgG est positif lorsque le taux d'IgG dépasse 13 $\mathrm{g \cdot L^{-1}}$. Déterminer, à l'aide du graphique, sur quelle période une analyse de sang donnerait ce test positif.

3. Sachant que le taux d'immunoglobuline est inférieur à 12 $\mathrm{g \cdot L^{-1}}$ en moyenne chez un adulte sain. Suivant ce modèle, durant quelles périodes le sujet pourrait-il être diagnostiqué sain ?